TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

AD. MEYER, OTTO GALLANDER,

J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

SJÄTTE ÅRGÅNGEN

1922—1923

STOCKHOLM

ALBERT BONNIERS FÖRLAG

STOCKHOLM
ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1923

Sjätte årgångens innehåll.

I. Uppsatser.

Sid.

AURÉN, T. E. Ett par laborationsuppgifter 163
BERGGREN, B. Några tillämpningar av sannolikhetskalkylen på tennisspelet 72
BLIX, KARL. Rekurrenta serier av andra ordningen 189
BLOM, C. E. Om glimlampan och dess användning 13
—— Om glimlampan som voltmeter 100
FRENDEL, A. Några undersökningar över lösta ämnens diffusion I ... 40
—— Några undersökningar över lösta ämnens diffusion II 152
GUSTAVER, B. Om nyare adsorbtionsteorier 25
—— Några försök vid undervisningen i elektrokemi 159
LINDBLAD, B. Om mätning av dubbelstjärnor och stjärndiametrar medelst Michelsons interferensmetod 221
LINDBORG, G. Om det exakta antalet primtal under ett visst tal 81
LINDSKOG, NAT. Härledning av ekvationerna för tangent och normal med given vinkelkoefficient till en konisk sektion 8
LUNDBERG, JOHN. En amerikansk skoltidskrift för matematik, fysik etc. 110
MANDAL, HJ. En demonstrationsväg 166
MEBIUS, C. A. Några trigonometriska summationsformler 125
MEYER, AD. Användningar av Realgymnasiets kurs i differentialkalkyl 135
—— Ytspänning och kapillaritet 214
PETRINI, H. Inledning till integralräkningen 212
SÖRENSEN, AUG. Några satser rörande fyrhörningar och tetraedrar ... 146
—— En användning och generalisering av mediansatsen 203
X. Ett maximiproblem 1
—— En geometrisk användning av de komplexa talen 61

II. Meddelanden, recensioner, uppgifter m. m.

Meddelanden.

Det sneda prismat och pyramiden (ARON SVENSSON) 169
Approximativ beräkning av kvadratrötter genom interpolation kvadrattabell (X) 171

Sid.
En anmärkning om räkning med approximativa tal (M—r) 234
Försök över kraftparallellogrammen (T. R.) 116
Metod att demonstrera kraftparallellogrammen (A. LING) 173
Kraftfältet kring en rak, strömförande metallisk ledare (A. FRENDEL) 175
Reaktionen mellan koppar och svavel (KNUT PARCK) 115
Ett riskabelt försök med klor (A. FRENDEL) 169
Från 1922 års läraremötes matematisk-fysiska sektion 44
Med anledning av höstterminens studentskrivningar (S. B—n) 176

Bokanmälan.
N. E. NÖRLUND, Videnskablige causerier (M—r) 233

Prisuppgift för 1922—23 59
Lösning av densamma 245

Matematiska uppgifter 45, 118, 177, 234
Lösningar 46, 119, 178, 235
Frågor och Svar 60
Brevlåda 124
Meddelande från Redaktionen 248
Rättelser 188, 248

Ett maximiproblem.

Av X.

I.

En cirkel och en punkt P inom densamma äro givna. Att finna den största i cirkeln inskrivna 4-hörning, vars diagonaler råkas i P.

Att börja med observera vi följande specialfall. Ligger P i cirkelns medelpunkt, finnas ∞^1 4-hörningar med maximiyta, nämligen de inskrivna kvadraterna. Närmar P sig periferien, längs en radie t. ex., måste vår sökta 4-hörning till formen alltmer närma sig en liksidig triangel, nämligen den bland de i cirkeln inskrivna, som har ett hörn i radiens ändpunkt.

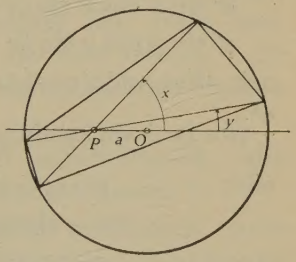


Fig. 1.

Vi sätta nu cirkelns radie = 1 och P:s avstånd från dess centrum = a, $0 < a < 1$, och få då med figurens beteckningar enl. känd formel 4-hörningens yta

$$A = 2\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x} \cdot \sqrt{1 - a^2 \sin^2 y} \cdot |\sin (x - y)|.$$

A har tydligen extremum på samma gång som

$$f(x, y) = (1 - a^2 \sin^2 x)(1 - a^2 \sin^2 y) \sin^2 (x - y),$$

vilken funktion vi därför undersöka i stället. Man erhåller tydligen alla geometriskt distinkta inskrivna 4-hörningar, vilkas diagonaler korsa varandra i P, genom att fastställa t. ex. $-\frac{\pi}{2} < x \leqq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y \leqq \frac{\pi}{2}$. Emellertid låta vi först x och y taga alla möjliga värden. För att värde-

paret (x, y) skall ge ett maximivärde, måste då $f'_x = f'_y =$
Bland lösningarna till dessa (sista) ekvationer kunn
sedan inskränka oss till sådana som falla inom de
angivna gränserna, innan vi undersöka, om maximum
ligger. Vi få alltså ekv.-syst.:

$$\frac{f'_x}{2(1-a^2\sin^2 y)} = -a^2 \sin x \cos x \sin^2(x-y) +$$
$$+(1-a^2\sin^2 x)\sin(x-y)\cos(x-y) = 0 \quad . \quad .$$
$$\frac{f'_y}{2(1-a^2\sin^2 x)} = -a^2 \sin y \cos y \sin^2(x-y) -$$
$$-(1-a^2\sin^2 y)\sin(x-y)\cos(x-y) = 0 \quad . \quad .$$

Därav

1. $\sin(x-y) = 0$; $x-y = k\pi$. $A = 0$. *Minimum.*
2. $\sin(x-y) \neq 0$; $x-y \neq k\pi$. Efter division med $\sin(x$ erhålles ur (1) och (2)

$$a^2 \sin x \cos x \sin(x-y) = (1-a^2\sin^2 x)\cos(x-y)$$
$$a^2 \sin y \cos y \sin(x-y) = -(1-a^2\sin^2 y)\cos(x-y)$$

och efter addition härur

$$\frac{a^2}{2}(\sin 2x + \sin 2y)\sin(x-y) = -a^2(\sin^2 x - \sin^2 y)\cos(x$$

eller
$$\sin(x+y)\sin(x-y)\cos(x-y) =$$
$$= -\sin(x+y)\sin(x-y)\cos(x-y),$$

d. v. s.
$$\sin(x+y)\sin(x-y)\cos(x-y) = 0 \quad . \quad .$$

Som $x-y \neq k\pi$, återstå de bägge möjligheterna

α) $\cos(x-y) = 0$ och β) $\sin(x+y) = 0$.

α) Då vi kunna inskränka oss till värdena på $x-y$ m
$+\pi$ *och* $-\pi$, återstår endast $x-y = \pm\frac{\pi}{2}$. Ur (3) oc
följer sedan $\sin 2x = \sin 2y = 0$ och *alltså* $x = 0$, y
eller $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ d. v. s. den ena diagonalen genom
rum, den andra vinkelrät däremot.

[1] Beträffande denna och andra satser om max. och min. hänvi
läroböcker i differentialkalkyl.

β) $\sin(x+y)=0$. Då vi ha $-\pi<x+y\leqq\pi$ och dessutom $x-y\neq k\pi$, återstår endast $x+y=0$ d. v. s. $y=-x$. Ur (3) följer sedan

$$a^2\sin x\cos x\sin 2x=(1-a^2\sin^2 x)\cos 2x$$

eller $0=(\cos 2x)^2-\frac{a^2-2}{2a^2}\cos 2x-\frac{1}{2}=g(z)$, om $z=\cos 2x$.

Ur $g(z)=0$ följer

$$z=\cos 2x=\frac{a^2-2\pm\sqrt{(a^2-2)^2+8a^4}}{4a^2} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

och efter en enkel räkning

$$\sin x=\pm\frac{\sqrt{3a^2+4a+2}\mp\sqrt{3a^2-4a+2}}{4a} \quad . \quad . \quad (7)$$

Nu är $g(1)=\frac{1}{a^2}>0$, $g(0)=-\frac{1}{2}<0$, $g(-1)=1-\frac{1}{a^2}<0$, $g(-\infty)>0$, varav följer att ekv. $g(z)=0$ har en rot mellan 0 och 1 och den andra <-1. Endast den förra motsvarar reella vinklar och erhålles för övre tecknet i (6). Väljes den mot denna rot svarande positiva spetsiga vinkeln till x blir $y=-x$.

Den tillhörande 4-hörningen är ett parallelltrapets, vars diagonaler bilda lika vinklar med diametern genom P.

Av lösningarna α och β måste enligt problemets natur den ena ge ett maximum. *Detta är lösningen β*, ty vi kunna lätt visa, att lösningen α varken ger max. eller min. Fördenskull ersätta vi x med ε och y med $\frac{\pi}{2}+\mu$ samt beräkna andragradstermerna i utvecklingen av

$$f\left(\varepsilon,\ \frac{\pi}{2}+\mu\right)-f\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

efter potenser av ε och μ. Dessa befinnas vara

$$(a^4-1)\varepsilon^2-2(a^2-1)\varepsilon\mu+(2a^2-1)\mu^2,$$

en form med diskriminanten $8a^4(1-a^2)>0$, vilket bevisar vårt påstående.

För $a=1$ erhålles ur (7) $\sin x = \pm\frac{\sqrt{9}-\sqrt{1}}{4} = \frac{1}{2}$ d. v. s. $x = \pm\frac{\pi}{6}$, som det var att vänta. För $a=0$ blir $\sin x$ i (7) av formen $\frac{0}{0}$, såsom det bör vara, enär problemet då har oändligt många lösningar.

Däremot är $\lim_{a\to 0}\left(\frac{\sqrt{3a^2+4a+2}-\sqrt{3a^2-4a+2}}{4a}\right) =$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{8a}{4a(\sqrt{3a^2+4a+2}+\sqrt{3a^2-4a+2})} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d. v. s. vår 4-hörnings diagonaler tendera att bli vinkelräta, då P närmar sig cirkelns centrum.

Medelst den bekanta projektionsmetoden framgår ur ovanstående lösningen av motsvarande problem för ellipsen. Ligger speciellt P på endera av ellipsens axlar äro lösningarna även i detta allmännare fall parallelltrapets.

II.

Av det föregående framgår dels att endast en lösning existerar till vårt problem dels att denna lösning kan konstrueras med linjal och passare. Denna konstruktion kan ju tänkas utförd enligt (6) eller (7). Men en sådan konstruktion vore ej blott tämligen komplicerad utan även »skällös» d. v. s. utan tydligt samband med det ursprungliga problemet. Följande sönderplockning av problemet torde måhända vara av större intresse.

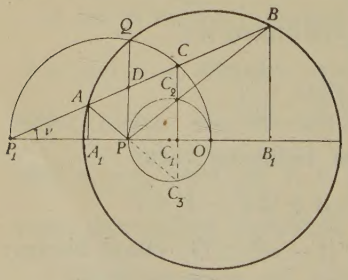


Fig. 2.

Vi utgå alltså från att *PA och PB skola bilda lika vinklar med OP* (fig. 2). Om AB utdragen skär OP:s förlängning i P_1, påstås först, att punkten P_1 är fix. Ty drag $PDQ \perp OP$. Då ligga enligt bissektrissatserna A och B

harmoniskt i förhållande till P_1 och D. Alltså är PQ den till P_1 hörande polaren (tangentkordan) och följaktligen är P_1 fix, då PQ är det. I förbigående anmärkes, att A, B, P, O ligga på samma cirkel, enär $P_1A \cdot P_1B = \overline{PQ}^2 = P_1P \cdot P_1O$. Vidare är $OP \cdot OP_1 = \overline{OQ}^2 = 1$ d. v. s. $OP_1 = \frac{1}{a}$.

Om vi nu draga AA_1 och $BB_1 \perp P_1O$, ha vi ersatt vårt problem med följande: *Att genom den till P inversa punkten P_1 draga en sekant P_1AB så, att parallelltrapetset AA_1B_1B får så stor yta som möjligt.*

Från mittpunkten C till AB drages $CC_1 \perp OP$. Kvadraten på den yta vi betrakta, kan då skrivas

$$4\overline{AC}^2 \cos^2 v \cdot \overline{CC_1}^2 = 4 \cdot CP_1 \cdot CD \cdot \cos^2 v \cdot \overline{CC_1}^2$$

till följd av en känd egenskap hos harmoniska punktpar. Men C (och Q) ligga på den cirkel som har diametern OP_1, vadan $\overline{CC_1}^2 = OC_1 \cdot C_1P_1$. Vidare är $CP_1 \cdot \cos v \cdot CD \cos v = C_1P_1 \cdot C_1P$.

Ifrågavarande yta är därför maximum på samma gång som $OC_1 \cdot C_1P \cdot \overline{C_1P_1}^2$. Om CC_1 skär den på OP som diameter uppritade cirkeln i C_2 (och C_3), är $\overline{C_1C_2}^2 = OC_1 \cdot C_1P$, varför den sista produkten kan ersättas med $(C_1P_1 \cdot C_1C_2)^2$. Därmed ha vi hunnit till följande med vårt ursprungliga ekvivalenta problem: *Att finna en punkt C_2 på cirkeln med diametern OP så att $C_1P_1 \cdot C_1C_2 = \max.$, där $C_2C_1 \perp OP_1$.* Här må påpekas, att PB och PA alltid gå genom C_2, C_3 resp. C, C_2, C_3 äro nämligen fotpunkterna för normalerna mot AB, PB, PA resp. från O. Emedan O ligger på den kring ABP omskrivna cirkeln, måste enligt en känd sats C, C_2, C_3 ligga i rät linje. Av symmetriskäl är $C_2C_3 \perp OP$ och alltså identisk med CC_1. PB är alltså direkt given, när C_2 är funnen.

Även det sista problemet kan återföras på enklare (fig. 3). Om vi betrakta de i vinkelöppningen XP_1Y liggande grenarna av alla (liksidiga) hyperbler, som ha P_1X och P_1Y till asymptoter, är som bekant $xy = \text{const.}$ på varje sådan

gren, om x betyder avståndet till P_1Y och y avståndet till P_1X från en punkt på grenen. För små värden på const. skär hyperbeln i fråga vår cirkel i en punkt nära O och en nära P. Då const. växer vandra dessa skärningspunkter mot varandra och mötas just i den punkt, för vilken rektangeln i fråga når sitt maximum. I denna punkt, låt vara C_2,

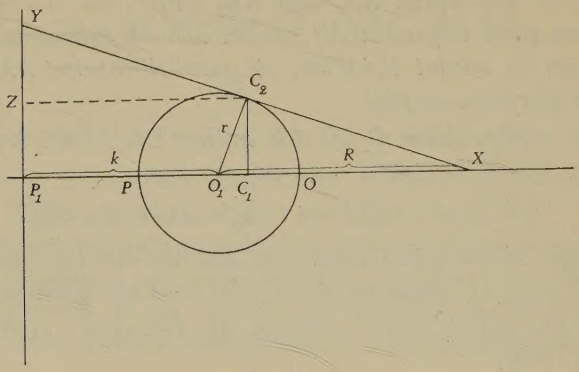


Fig. 3.

tangeras alltså cirkeln av en hyperbel med asymptoterna P_1X *och* P_1Y. Nu vet man, att kontaktpunkten halverar det stycke av en hyperbeltangent, som ligger mellan asymptoterna. Alltså gäller nu *att finna en punkt* C_2 *på vår cirkel, som halverar det stycke* XY *av tangenten i* C_2, *som ligger mellan en diameter* (PO) *och en däremot vinkelrät linje* P_1Y. Om O_1 är cirkelns medelpunkt, är $XC_2 \cdot XY = XP_1 \cdot XO_1$ eller

$$2(R^2 - r^2) = (R+k)R \left(\text{, om } O_1X = R,\ O_1C_2 = r = \frac{a}{2},\ O_1P_1 = k = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{a} - \frac{a}{2} \right).$$

Den sista ekv. kan skrivas $R(R-k) = 2r^2$ och vi hamna därmed vid det gamla skolproblemet:

Att konstruera en rektangel med given yta ($2r^2$ = inskrivna kvadratens yta) *och given skillnad* (k) *mellan basen och höjden.*

På lösningen av denna uppgift torde inga ord behöva spillas. Då vi funnit endast en lösning (den symmetriska hälften av våra figurer ger ju intet nytt) och på förhand

veta, att endast en sådan existerar, måste den funna vara den sökta.

Till tjänst för den, som till äventyrs önskar kontrollera överensstämmelsen mellan lösningarna i I och II, må påpekas, att

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3a^2 + 2 - \sqrt{(a^2-2)^2 + 8a^4}}{8a^2}$$

enligt ekv. (6) geometriskt betyder $\overline{OC}^2$ i fig. 2, emedan $\angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \angle APB = \angle DPB$. Dessutom är $\overline{OC}^2 = OP_1 \cdot OC_1 = \frac{1}{a}\left(r - \frac{r^2}{R}\right)$.

Härledning av ekvationerna för tangent och normal med given vinkelkoefficient till en konisk sektion.

Av NAT. LINDSKOG.

Sedan räkning med derivator intagits i matematikkursen för realgymnasiet, bör ju härledningen av ekvationen för tangenten till en kurva i en given punkt ske med tillhjälp av derivatläran. Detta gäller således även om härledningen av ekvationen för tangenten i en given punkt av en konisk sektion. Därigenom har denna härledning blivit betydligt kortare än den man förut måst göra. Däremot har jag icke sett någon härledning av den andra formen för tangentens ekvation, den form, som innehåller vinkelkoefficienten i stället för tangeringspunktens koordinater, som gjorts kortare och bekvämare än den gamla. Då en sådan härledning bör vara av intresse för de skolmän, som undervisa i matematik på realgymnasiet, tar jag mig friheten här framlägga densamma oaktat dess synnerligen enkla beskaffenhet. Jag inskränker mig emellertid till parabeln och ellipsen, då var och en sedan kan göra de förändringar, som fordras för cirkeln och hyperbeln.

Parabelns tangent.

Här förutsättes, att parabelns ekvation är $y^2=2px$. Då är ekvationen för tangenten till denna parabel i punkten $(x_1 \mid y_1)$ $yy_1=p(x+x_1)$ eller, skriven under annan form,

$$y=\frac{p}{y_1}x+\frac{px_1}{y_1}.$$

Vill man i tangentens ekvation ha in vinkelkoefficienten k i stället för x_1 och y_1, så sättes $\frac{p}{y_1}=k$, och det återstår således att få $\frac{px_1}{y_1}$ uttryckt i k och p. Men punkten $(x_1 \mid y_1)$ ligger på parabeln. Man får således ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{p}{y_1}=k; \\ y_1^2=2px_1. \end{cases}$$

$$\therefore \frac{px_1}{y_1}=\frac{y_1}{2}=\frac{p}{2k}; \quad \therefore y=kx+\frac{p}{2k},$$

vilken därför utgör den sökta ekvationen.

Ellipsens tangent.

Förutsättning: Ellipsens ekvation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Således ekv. för tangenten i punkten $(x_1 \; y_1)$ på ellipsen

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \text{ eller } y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2}{y_1}.$$

De båda ekvationer, som bestämma x_1 och y_1, bliva således

$$\begin{cases} -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=k; \\ \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1; \end{cases}$$

$$\therefore x_1=-\frac{a^2y_1k}{b^2}; \quad \therefore \frac{a^4y_1^2k^2}{a^2b^4}+\frac{y_1^2}{b^2}=1;$$

$$\therefore \frac{y_1^2}{b^4}(a^2k^2+b^2)=1; \quad \therefore \frac{b^2}{y_1}=\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}.$$

Således bli de båda tangenternas ekvationer

$$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}.$$

Normalen.

Samma metod kan användas för härledning av ekvationen för den normal, som har vinkelkoefficienten k. Ekvationen för normalen till ovan nämnda parabel i punkten $(x_1 \mid y_1)$ är

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

eller under annan form

$$y = -\frac{y_1}{p}x + \frac{y_1(p + x_1)}{p}.$$

För bestämmande av x_1 och y_1 har man således ekvationssystemet

$$-\frac{y_1}{p} = k; \quad y_1^2 = 2px_1; \quad \therefore\ y_1 = -kp; \quad x_1 = \frac{k^2p}{2}.$$

Ekvationen för normalen blir således

$$y = kx - \frac{kp(2 + k^2)}{2}.$$

För ovan nämnda ellips blir ekvationen för normalen i punkten $(x_1 \mid y_1)$

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$$

eller under annan form

$$y = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}x - \frac{c^2y_1}{b^2}.$$

För bestämmande av x_1 och y_1 har man således systemet

$$\frac{a^2y_1}{b^2x_1} = k; \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{a^2y_1}{kb^2}; \quad \frac{y_1^2}{b^4}\left(\frac{a^2}{k^2} + b^2\right) = 1; \quad \therefore\ \frac{y_1}{b^2} = \pm\frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2b^2}}.$$

Ekvationerna för de båda normalerna med vinkelkoefficienten k bli således

$$y = kx \pm \frac{kc^2}{\sqrt{a^2 + k^2b^2}}.$$

För att få tillämpning av dessa ekvationer kan man exempelvis uppställa följande fråga:

Vilket är villkoret för att man från en punkt på en parabels axel skall kunna draga tre normaler till en parabel?

Kallas x-koordinaten för denna punkt x_2, erhålles ekvationen

$$0 = kx_2 - \frac{kp(2+k^2)}{2},$$

vilken alltid ger ett värde $k=0$. De övriga båda värdena på k bliva

$$k = \pm\sqrt{\frac{2(x_2 - p)}{p}}.$$

För att dessa båda värden skola vara reella och skilja sig från det förut erhållna, fordras, att $x_2 > p$, vilket således blir det begärda villkoret.

Anmärkning av redaktionen.

Det förefaller oss, som om den högt ärade författaren till ovanstående, likväl förbisett en sak, nämligen att avsikten med den vanliga deduktionen för en tangent med vinkelkoefficienten k till en andragradskurva, ej endast är att komma fram till en bekväm och användbar formel, utan kanhända ännu mer att visa, att en tangent till en kurva kan fås, ej blott genom att låta sekanten vrida sig kring en punkt på kurvan, utan även genom att låta den förflytta sig parallellt med sig själv, till dess att skärningspunkterna sammanfalla, en sak som är lika viktig som den föregående.

När därtill kommer, att denna deduktion är ofantligt mycket konkretare och lättare att genomtränga för lärjungarna — de hava ju långt förut genomgått läran om lika rötter till en andragradsekvation — än en härledning

med differentialkalkyl, vilken för dem, kanske i de flesta fall, blott är en mekanisk tillämpning av formler; så anse vi, att det vore stor skada, om denna härledning, såsom förf. tyckes vilja, skulle alldeles bortfalla ur undervisningen.

Däremot giva vi gärna förf. rätt uti, att det är en synnerligen nyttig övning att framtaga sambandet mellan de båda, till synes olika, formlerna.

Formeln för *normalen* med given vinkelkoefficient torde endast ytterst sällan komma till användning — kanhända blott i det av förf. givna exemplet —, och synes oss därför mer lämpa sig till ett övningsexempel t. ex. i en skrivning, än att utgöra en integrerande del av undervisningen.

M—r.

Om glimlampan och dess användning.

Av C. E. BLOM.

Ett av belysningsteknikens huvudproblem är ju att göra belysningen så ekonomisk som möjligt. Framför allt har man inriktat sig på att erhålla så stor ljusstyrka som möjligt per watt, på samma gång man sökt åstadkomma detta med så billiga och lättskötta anordningar som möjligt. »Halvwattlampan» är ett vackert exempel på de resultat, som i detta avseende ha nåtts under det sista årtiondet.

Ett minst lika viktigt problem är att avpassa ljuskällans styrka efter de olika behov, som förefinnas. Man har därvid gjort den erfarenheten, att ju mindre man gör ljusstyrkan, desto mindre blir utbytet per watt och desto dyrare varje normalljus. Där endast en mindre ljusstyrka erfordras, blir trots detta den ljussvagare lampan ofta den mer ekonomiska på grund av dess lägre effektbehov.

Att åstadkomma glödlampor med liten total effektförbrukning har således även varit en av belysningsteknikens uppgifter. För låga spänningar möter detta inga svårigheter, men dessa växa med spänningen, ity att man behöver en allt längre och finare glödtråd. För 220 volt ligger den undre gränsen vid 10 och 16 normalljus med 13 resp. 20 watts effektbehov. Svagare lampor skulle erfordra en finare och längre tråd än man för närvarande i hållbar form kan tillverka.

Det är närmast detta problem man löst i och med konstruktionen av glimlampan. Dess totala effektförbrukning belöper sig endast till 3 à 5 watt. Men, såsom var att vänta, har man fått betala denna vinst med en avsevärd minskning i verkningsgraden. Dessa lampor kräva näm-

ligen 6 à 8 watt per normalljus. Med sin obetydliga ljusstyrka, understigande ett normalljus, äro de naturligtvis ej lämpliga till vanlig rumsbelysning. För speciella ändamål, såsom nattlampor, ledlampor, kontrollampor vid elektriska anläggningar, för reklamändamål o. s. v., där det egentligen kommer an på att giva markerade ljuspunkter, äro de, tack vare sin ringa strömförbrukning, av stort ekonomiskt värde, helst som de äro relativt billiga — för närvarande 2,50 kr. — och ha en livslängd, som torde vara jämförlig med de vanliga metalltrådlampornas.

Glimlampan har emellertid betydelse ej endast såsom ljuskälla. Den besitter åtskilliga egenskaper, som givit den en synnerligen mångsidig användning inom tekniken. Även för undervisningsändamål kan man på en mångfald sätt betjäna sig av densamma. Förf. har därför trott, att en redogörelse för dess konstruktion och användning skulle vara av intresse för tidskriftens läsare.

*

Till yttre form och storlek likna glimlamporna de vanliga glödlamporna men skilja sig till sin konstruktion i övrigt helt och hållet från dessa. I stället för glödtråd användes nämligen glimljuset — därav namnet — vid en elektrisk urladdning i förtunnad gas såsom ljuskälla.

Idén att utnyttja strålningen från en gas för belysningsändamål är ju icke ny. Den tanken ligger också nära till hands, att man på denna väg, tack vare gasernas selektiva strålning, skulle kunna erhålla en ljuskälla med stor verkningsgrad. Även om de stora förväntningar man hyst i detta avseende ej ha infriats, så har man att anteckna åtskilliga framgångar.

Här må erinras om huru t. ex. *Bremer* (1900) med hjälp av sina med salter indränkta kol, effektkol, förstärkte strålningen från själva ljusbågen i en båglampa och därigenom nästan fördubblade densammas verkningsgrad. *Arons* (1896) och *Cooper-Hewitts* bekanta kvicksilverbåglampa

är ett annat exempel på god ljusekonomi — 1/4 watt per normalljus — vunnen på denna väg, *Schröters* neonbåglampa med ett effektbehov av 1/2 watt per normalljus ett annat; härom mera senare.

Ej blott bågurladdning utan även glimurladdning har kommit till användning. Så konstruerade amerikanaren *Moore* för ett tjugutal år sedan sina meterlånga urladdningsrör, vilka emellertid i likhet med vad vi äro vana vid, när det gäller geisslerurladdning, krävde hög spänning — åtskilliga tusen volt — och därför, ävensom på grund av dryga monteringskostnader, aldrig fingo någon större användning.[1]

Idén med en lysande gas som ljuskälla är således med delvis rätt stor framgång prövad förut.

När det nu gällde att söka konstruera en »gaslampa» med liten total effektförbrukning var det naturligt, att man skulle försöka med en glimurladdning; en bågurladdning kräver ju alltid rätt stor strömstyrka och därmed avsevärd energi. Men svårigheten var den höga spänning, som erfordrades. Det är nu denna olägenhet man övervunnit vid glimlampan; denna kräver nämligen endast vanlig nätspänning.

Vad som möjliggjort detta är främst gasfyllningen. Såsom sådan användes en neon-heliumblandning, som erhålles vid fabrikationen av flytande luft i samband med framställningen av syre, kväve och argon. Neon, som är den dominerande av de två, är ur två synpunkter fördelaktig som gasfyllning. Samtidigt som den endast kräver liten spänning, har den nämligen ett synnerligen ljusstarkt spektrum; 90 % av ljusenergien ligger i gult och rött mellan 570 och 670 $\mu\,\mu$.

Neons ringa spänningsbehov påvisades först av *Bouty*.

[1] Moorerören voro ursprungligen fyllda med kvävgas och behövde 1,8 watt per normalljus. Som speciallampor med kolsyrefyllning, som ger vitt, dagsljusliknande ljus, ha de t. ex. vid färgerier, där dylik belysning kräves, fått en viss användning. Genom ädelgasfyllning kunde *Claude* sedermera förbättra verkningsgraden till 3/4 watt per normalljus. Claudelamporna ha i Frankrike använts för dekorativa ändamål.

Enligt dennes undersökningar (1904, 1910) utmärkas ädelgaserna över huvud — dock mest neon — av en i jämförelse med andra gaser utomordentligt ringa dielektrisk hållfasthet, vilket innebär, att de vid relativt ringa spänning, benämnd kritisk spänning eller tändspänning, genom stötjonisation bli ledande och börja lysa.[1]

En låg tändspänning fordrar bl. a. ett litet katodfall. Dettas storlek är i första hand beroende av själva gasen men beror även av katodmaterialet, vilket står i överensstämmelse med det antagande man gjort, nämligen att det är de positiva gasjonerna, som efter acceleration i mörka katodrummet genom stöt mot katoden frigöra de för ledningen genom gasen nödvändiga elektronerna. Ju lättare katoden avger elektroner, desto mindre bör katodfallet blir. *May* fann också, att alkalimetallerna giva de lägsta katodfallen.

Förutom av gasen och katodmaterialet beror tändspänningen på ett rätt så komplicerat sätt av urladdningskärlets och elektrodernas form och inbördes avstånd.

Genom att taga hänsyn till alla dessa faktorer lyckades *Schröter* (1918) konstruera en glimlampa med neonfyllning, som tänder vid 150 à 200 volt.[2] Användning av alkalimetall som katod — vilket skulle ha bringat ned tändspänningen till omkring 100 volt och gjort lampan användbar även för 110 volt — visade sig omöjligt på grund av den starka förstoftningen. Praktiskt användbara som elektrodmaterial fann man aluminium och järn, varvid man dock fick nöja sig med den ovannämnda högre tändspänningen.[3]

Järn visade sig ur flera synpunkter lämpligt som katodmaterial och har mest kommit till användning. Vid

[1] Se t. ex. *R. Holm*, Om elektricitetsström genom gaser etc. Denna tidskr. 1919—20 sid. 88.

[2] Se Elektrotechnische Zeitschr. årg. 1919 och 1920; Die Naturwissenschaften 1920 sid. 627.

[3] Enligt *Skaupy* (Zeitschr. für tekn. Physik 1922, sid. 62) har man nyligen med extra rent järn och volfram i fin fördelning i form av nät lyckats erhålla lampor för 220 volt. Någon slags spetsverkan torde här bidraga till den låga tändspänningen.

järn blir förstoftningen relativt ringa i neonatmosfär och i samband därmed gasoklusionen med ty åtföljande »hårdnande» obetydlig, vilket det ena som det andra medför en större livslängd.

Schröter försökte först att — såsom sker vid Moorelampan — utnyttja den *positiva* glimljuspelaren, vilken utgående från anoden vid tryck av storleksordningen 1 mm brukar till största delen utfylla urladdningskärlet. På så vis erhölls rätt ljusstarka lampor — 5 watt gåvo 2 normalljus — men de visade sig opraktiska. De tände nämligen ej vid 220 volt utan behövde sättas igång medelst en induktionsstöt, vilket skulle ha blivit alltför dyrbart och besvärligt vid dessa små lampor.[1]

Schröter övergav därför den positiva pelaren och valde ett sådant tryck (8 à 10 mm) och elektrodavstånd (tämligen litet) att den positiva pelaren försvann, och endast det *negativa* glimljuset kring katoden lyste. Ljuseffekten blev då mindre, men man fick den behövliga lägre tändspänningen. Efter denna princip ha så småningom en hel del olika glimlamptyper utarbetats.[2]

Emedan det negativa glimljuset endast såsom ett ljussvagt, tunt skikt täcker katoden, måste man för att få någorlunda ljusstyrka använda stora katodytor. I en av de första typerna, den s. k. kupollampan, fick katoden formen av en halvsfär, under det att anoden (för att ej skymma) bestod endast av en liten tråd, som förde upp emot katodens undre kant. För växelström var emellertid denna lampa olämplig, emedan endast strömmen i ena riktningen utnyttjades. För att båda strömriktningarna skola kunna tillgodogöras, måste bägge elektroderna ha stor utsträckning

[1] 1915 konstruerade Schröter en neonbåglampa för 110 och 220 volts likström, som arbetar efter samma principer som kvicksilverbåglampan. I båda dessa lampor är det den positiva pelaren som utnyttjas. Neonlampor om 300 à 400 normalljus kräva $^1/_2$ watt per normalljus och användas i Tyskland för reklambelysning (rosafärgat ljus); särskild tändanordning genom induktionsstöt användes.

[2] De första lamporna fördes i marknaden av Jul. Pintsch's fabriker i Berlin. Numera tillverkas de även av firmorna Philip och Osram.

och samtidigt vara placerade så, att de ej skymma varandra. I fig. 1 (Pintsch) har den ena elektroden formen av en spiral, som släpper igenom ljuset från den andra platt-formiga elektroden. I fig. 2 (Osram) ha båda elektroderna kupolform och äro placerade över varandra. I andra typer utgöras elektroderna av parallellt löpande spiraler. Användes lampan för likström, lyser naturligtvis endast den ena elektroden, varför man kan använda lampan som en mycket bekväm polsökare.

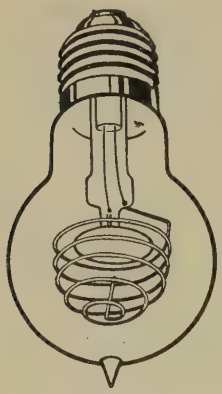


Fig. 1.

Vid växelström måste spänningens maximalvärde minst uppnå tändspänningen, för att lampan skall lysa. Eftersom den undre gränsen för tändspänningen för närvarande ligger vid 150 à 160 volt, har man ej kunnat konstruera lampor för lägre effektiv spänning än 125 à 130 volt. Då lampan drives med växelström, utnyttjas endast topparna mellan tändspänningen och en viss minsta spänning, som erfordras för att vidmakthålla urladdningen. Minimispänningen ligger vid geisslerrör ofta betydligt under tändspänningen, vid glimlamporna 15 à 30 volt under densamma. Att lampan lyser endast för toppvärdena medför ingen störande inverkan på ögat, när frekvensen är tillräckligt stor, 40 à 50 perioder.

Fig. 2.

Emedan glimljuset såsom ett tunt ljusskikt täcker katoden, får detta precis katodens form. Man har på ett intressant sätt i och för reklamändamål begagnat sig härav, i det att man givit den ena elektroden form av en bokstav (fig. 3). Den andra elektroden är placerad bakom denna, så att ljuset

från densamma, om lampan drives med växelström, ej verkar störande. Genom sammansättning av dylika bokstavslampor kan man erhålla en synnerligen verksam reklam.

På sista tiden har Osrambolaget fört i marknaden större cylinderformiga lampor med plana, rektangulära järnelektroder, vilka ge en stor, lysande yta. I ett cylindriskt omhölje till lampan, vilket kan ombytas efter behag, utskäres den text man önskar.

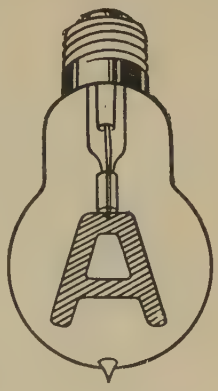


Fig. 3.

Ljusets färg beror på gasfyllningen, vilken synes variera något. I en del lampor med större neonhalt har man infört kvicksilverånga, vilket mildrar neons skarpa orangefärg till ljus rosa. I andra lampor synes att döma av det gulaktiga skenet heliumprocenten vara större.

För att en lampa, som tänder vid 150 à 200 volt, skall kunna användas för t. ex. 220 volt, erfordras för att hindra överbelastning ett förkopplingsmotstånd, som tar upp den överflödiga spänningen. Ett sådant är inmonterat i själva lampan, i Pintsch's lampor i form av en liten motståndsrulle (2 à 3000 ohm), placerad i lampans sockel, i Osrams bestående av en spiral av glas, överdragen med grafit och inmonterad inom lampans glashölje.

Nödvändigheten av och betydelsen av detta förkopplingsmotstånd framgår bäst av lampans karaktäristik, som har det av fig. 4 utvisade, för ledningen i en gas karaktäristiska förloppet *ABC*. Som abscissa är avsatt strömstyrkan i ampère och som ordinata elektrodspänningen i volt. Karaktäristiken faller från *A*, som är tändspänningen (e_o), till *B* och stiger därefter nära nog linjärt för åtskilliga av mig undersökta lampor.

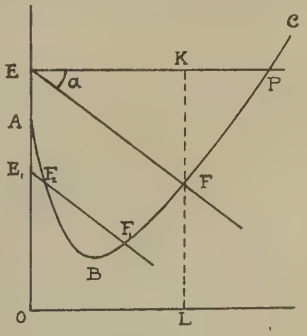


Fig. 4.

Då karaktäristiken är given, kan man på grafisk väg lätt finna den ström ($i = OL$) och elektrodspänning ($e = FL$), som motsvarar nätspänningen E volt och förkopplingsmotståndet R ohm. Man har endast att från punkten E draga en linje EF, som med abscissaxeln bildar en vinkel α, sådan att $\operatorname{tg} \alpha = R$; KF representerar då den av motståndet upptagna spänningen. Brunne lampan vid E volts nätspänning utan förkoppling, skulle strömstyrkan vara den mot punkten P svarande.

Minskas nätspänningen till E_1 ($< e_0$) under det att förkopplingsmotståndet fortfarande är R ohm, erhållas två skärningspunkter F_1 och F_2. Av dessa motsvarar endast F_1 ett stabilt tillstånd. Såsom *Kaufmann* och *Wagner* ha visat, erfordras för stabilitet att $\frac{\partial e}{\partial i} + R > O$, vilket villkor ej är uppfyllt i F_2, där kurvan stupar hastigare än »motståndslinjen».[1] Minskas nätspänningen ytterligare, sammanfalla till slut F_1 och F_2 och den häremot svarande nätspänningen är den lägsta, för vilken lampan kan lysa vid ifrågavarande förkopplingsmotstånd. Genom att öka nätspänningen och motståndet (till åtskilliga hundratusen ohm) kan man få lampan att brinna vid allt mindre strömstyrkor. Åtskilliga lampor ge tydligt ljus ännu vid 10^{-7} à 10^{-8} ampère. Den normala driftströmstyrkan är 20 à 30 milliampère.[2] Med strömstyrkan ändras lampans inre motstånd oerhört, från storleksordningen 1 megohm vid nyssnämnda små strömstyrkor till 20000 à 30000 ohm vid vanlig drift.[3] Då ej ett konstant motstånd erfordras, kan man ofta ha nytta av glimlampan såsom förkoppling, när man vill arbeta med svagström direkt på belysningsledningen.

[1] Den vanliga båglampans karaktäristik saknar minimum och är ständigt fallande, varför förkoppling här alltid måste användas.

[2] Minimipunkten B ligger hos av mig undersökta lampor vid $0{,}1$ till 1 milliampère.

[3] Åro elektroderna olika stora, är motståndet beroende på strömriktningen. Det är störst, då den mindre elektroden är katod, ty då har ju det ledande glimljusskiktet minsta utsträckningen. Pintsch's fabrik har konstruerat en dylik »lampa», där den ena elektroden utgöres av en fin spets; denna användes som likriktare av växelström, t. ex. vid laddning av smärre ackumulatorer.

En minskning av strömstyrkan är åtföljd av en minskning i glimljusets utbredning på katoden, varför lampan kan användas som demonstrationsgalvanometer, då man ur ljusets utbredning kan skatta strömmens storleksordning.[1] Dess stora strömkänslighet kommer väl till pass, då man t. ex. vill demonstrera selens ljuskänslighet, påvisa joniseringens inflytande på lågors ledningsförmåga eller undersöka och lokalisera isolationsfel, (upp till 1 à 10 megohm). I alla dessa fall är det av stort värde, att lampan är alldeles riskfri visavi överbelastning.

Glimlampans egenskap att tända först vid en viss spänning möjliggör en mångsidig användning av densamma inom elektrotekniken. Endast några exempel må anföras. Kopplas en glimlampa parallellt med en säkerhetspropp, passerar ingen ström genom lampan, så länge proppen är hel. Då den smälter, kommer emellertid hela spänningen att ligga på lampan, den tänder, och man finner genast proppen i fråga. På samma sätt kan man kontrollera, om en strömbrytare är öppen eller sluten, markera dess plats o. s. v. Överspänningar på en kraftledning kontrolleras på enkelt sätt med densamma, varvid högspänningen transformeras ned, så att lampan normalt ej lyser.

Skulle lampan gå sönder, slocknar den ögonblickligen på grund av förändringen i tryck och gasblandning, varför den är explosionsfri och därför med fördel kan användas i gruvor eller över huvud där man har att göra med eldfarliga gaser.

*

Som en ytterligare illustration till glimlampans mångsidiga användbarhet må till slut påpekas, att man lätt kan få densamma att ge intermittent ljus, klippljus, och därmed förstärka dess verkan som ledlampa samt vidare utnyttja den som generator för svag växelström.

[1] Vid smala, cylindriska eller plana, rektangulära elektroder är enl. *Heel* glimljusets utsträckning direkt prop. mot strömstyrkan. På denna lag grundar sig *Gehrckes* glimljusoscillograf.

Då förf. vid ett tillfälle använde en glimlampa för prövning av isolationen hos några papperskondensatorer, befanns, att lampan, som var kopplad på nätspänningen (220 volt) i serie med kondensatorn, började blinka och ge momentana klipp med bestämda mellanrum. Förklaringen var lätt funnen; klippen förorsakades av ett isolationsfel i kondensatorn. Genom att parallellkoppla ett stort motstånd (R) och en hel kondensator (C) kunde samma fenomen erhållas.

Beteckna lampans tändspänning och minimispänning med resp. e_o och e_m och nätspänningen med E. Låt vidare A vara jordad och F förbunden med pluspolen.

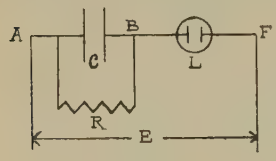


Fig. 5.

Då strömmen tillkopplas, laddas kondensatorn genom lampan (L), B:s potential stiger, och lampan slocknar, då elektrodspänningen sjunkit till e_m. Kondensatorn urladdas därefter genom R, och lampan tänder ånyo, då potentialen i B sjunkit så, att elektrodspänningen uppnått värdet e_o, och därpå upprepas det hela.

Minskas R, ökas frekvensen, i det att kondensatorn urladdas hastigare; minskning av kapaciteten har samma verkan. Ökas nätspänningen, stiger frekvensen i regel, tills den vid ett visst värde hastigt avtager och lampan brinner kontinuerligt. Minskas motståndet för mycket, inträffar detsamma.

Genom såväl experiment som beräkning finner man lätt, att villkoret för att lampan skall giva intermittent ljus är, att »motståndslinjen» skall träffa den statiska karaktäristikens fallande del och så att $\frac{\partial e}{\partial i} + R < O$; därav orsaken till att alltför stort E och för litet R ger kontinuerligt ljus.[1]

[1] Man lägger märke till, att stabilitetsvillkoret vid denna koppling är detsamma som vid den förut omnämnda kopplingen, då endast ett ohmskt motstånd var kopplat i serie med lampan. Även om kondensatorn placeras parallellt med lampan erhålles samma villkor. Se *Wagner*, Diss. Göttingen 1910.

Frekvensen kan varieras inom mycket vida gränser, från klipp med $^1/_4$ minuts mellanrum och mer (åtskilliga mikrofarad och stort motstånd) upp till frekvenser, som närma sig hörbarhetsgränsen (några tusen cm och små motstånd), vilket konstateras med hjälp av en inkopplad telefon. Även lampan ger en ton, ehuru mycket svag, i likhet med den sjungande båglampan.

I huvudledningen, t. ex. vid *BL*, får man tydligen likriktade strömstötar, till styrka bestämda av kondensatorns storlek, ehuru alltid rätt svaga på grund av lampans stora motstånd, dock tillräckligt starka (minst $^1/_2$ mikrofad behövlig) för att t. ex. driva en av Telegrafverkets vanliga Morseapparater. Försök med dylika visa en stor konstans hos stötarna. Kopplar man in ett relä, kan man med hjälp av detta utlösa starkare strömstötar, t. ex. få en ljusstark glödlampa att ge klippljus.

I ledningen mellan *B* och *C* erhålles tydligen växelström. Genom att här inkoppla primärledningen till en liten vanlig telefontransformator (omsättningsförhållande 1:2) kan man erhålla växelström, visserligen ej sinusformad men fullt användbar som strömkälla vid mätning av vätskors ledningsförmåga. Ehuru strömmen ej är symmetrisk, äro strömmängderna i båda riktningarna lika. Apparaten arbetar så gott som ljudlöst, och man störes ej av induktoriets vanliga rassel.

En kupollampa av Pintsch's fabrikation visade sig bäst som generator; här låg karaktäristikens minimipunkt högst, nämligen vid 0,9 milliampère. Med en liten glimmerkondensator på 5000 cm och ett parallellkopplat vätskemotstånd erhölls vid 500 à 600 perioder omkring 20 volt (maximal amplitud) från transformatorns klämskruvar.

Att de nyss beskrivna fenomenen skulle beteckna något till sin princip väsentligen nytt var knappast att vänta, då de falla inom ett område så grundligt genomarbetat som växelströmstekniken. Det visade sig ej heller vara fallet. Att ett geisslerrör med en parallellkopplad

kondensator och ett seriekopplat stort motstånd[1] gav intermittent ström påvisades och undersöktes redan av *Gassiot* (1860) och *Hittorf* (1879), vilken även antydde den riktiga förklaringsgrunden. Sedermera ha bl. a. *Righi* (1902), *Valle* och *Herweg* (1912) undersökt frekvens, villkor för intermittensen m. m., och *Gehrcke, Reichenheim* och *Wertheimer* visat, att man kan konstruera rör, som generera växelström med rätt så god effekt enligt denna princip.[2] Härvid användes högspänd ström. Det syntes mig vara av ett visst intresse att påpeka, att dessa fenomen nu äro lätt åtkomliga även med hjälp av låg spänning.

I en följande uppsats vill förf. redogöra för glimlampans användning som voltmeter för lik- och växelström.

[1] Denna koppling erhålles om i fig. 5 *C* flyttas och inkopplas parallellt med *L*.

[2] Se *Marx*, Handb. d. Radiologie Bd III, S. 197.

Om nyare adsorptionsteorier.[1]

Av B. GUSTAVER.

Med namnet adsorption plägar man som bekant beteckna ett förlopp, då en fast (vanligen porös eller pulverformig) kropp genom att upptaga och binda molekyler vid sin yta framkallar en koncentrationsändring i en lösning eller en gas, med vilken den fasta kroppen sammanföres. Det är emellertid nödvändigt att därtill foga villkoren, att upptagandet skall ske hastigt och reversibelt. Äro dessa villkor ej uppfyllda, finnes skäl att misstänka, att en annan än en adsorptionsprocess försiggår. Då ett adsorptionsförlopp ofta är åtföljt av andra processer, såsom kemiska reaktioner, kondensation eller lösning, är det ändamålsenligt att använda den hypotesfria termen *sorption* i stället för de speciella termerna adsorption (= ytförtätning) och absorption (= lösning). Det sorberande ämnet (den fasta kroppen) bör då benämnas *sorbens*, och för det ämne, som skall sorberas resp. redan upptagits äro termerna *sorbend* och *sorbat* passande.

Som bekant återges sorptionsisotermen merendels av en exponentialfunktion, den s. k. *Freundlich*ska formeln

$$x = k \cdot c^n,$$

varvid konstanten n vanligen är < 1 och den vid små koncentrationer c upptagna mängden x är jämförelsevis stor. En adsorptionsteori måste därför bygga på att den verksamma kraften är störst i förloppets början och sedan hastigt avtager.

Det ligger nära till hands att tänka sig, att sorptionen fortgår till ett maximum, uppnått då den sorberande ytan

[1] Föredrag hållet å Kemiska sällskapet i Stockholm $^{15}/_{3}$ 1922.

är belagd med ett lager sorberade molekyler. Sorptionskraften är då avmättad och dess räckvidd är lika med det sorberade skiktets tjocklek. *Schmidt* var den förste som trodde sig experimentellt ha påvisat förekomsten av ett sorptionsmaximum, men såsom *Williams* visade voro hans försök ej invändsfria, i det att lösningsmedlets sorption ej blivit beaktad (en betydande felkälla vid höga koncentrationer). Att ett sorptionsmaximum dock inträder torde vara otvivelaktigt och *Marc* påvisade inträdandet av ett dylikt vid t. ex. sorptionen av färgämnen vid kristaller.

Det största intresset knyter sig givetvis till frågan om adsorptionskraftens natur och storlek.

Man har oftast föreställt sig adsorptionskraften såsom varande av rent fysikalisk art. Den *Freundlich*ska teorien, grundad på *Gibbs* sats, att ämnen, som sänka ytspänningen anrika sig i ytan, har en längre tid behärskat föreställningarna och omfattas fortfarande, men är ofruktbar, då ytspänningen i en fast (stel) yta ej kan mätas. *Arrhenius* förmodade ett sammanhang mellan adsorption och kompressibilitet och ansåg sorptionskraften identisk med de fysikaliska attraktionskrafterna eller kohäsionskrafterna mellan molekylerna i en vätska eller fast kropp. Det är av intresse, att nyligen två amerikanska forskare, *Lamb och Coolidge,* undersökt sorptionsvärmet vid sorptionen av ångor i kol och funnit, att nettosorptionsvärmet, sedan alltså ångbildningsvärmet (frigjort vid kondensationen) fråndräknats, är proportionellt mot kompressionsvärmet av de ifrågavarande vätskorna vid så höga tryck som 37 000 atmosfärer. Antages kolet vara poröst med kapillärer av $10 \cdot 10^{-8}$ cm vidd, beräknas det av kapillarkrafterna utövade trycket till cirka 3 000 atmosfärer. Härav framgår, att andra betydligt starkare krafter än de kapillära krafterna äro verksamma vid sorptionen.

Bland företrädarna av den uppfattningen, att kraften är av rent kemisk natur, märkas *Michaelis och Rona.* Dessa hänförde sorptionsfenomenen till endera av 4 grupper: ekvivalentsorption, utbytessorption, hydrolytisk sorption och

uppladdningssorption, av vilka endast de två första typerna skulle vara allmänt förekommande. Vid utbytessorptionen bindes den sorberade jonen kemiskt, varvid sorbens sänder en annan jon av samma slag i lösning. Vid vissa sorbens, såsom sura och basiska oxider är sorptionens kemiska karaktär otvivelaktig, men i andra fall, om sorbens är ett indifferent ämne såsom kol, torde väl den rent kemiska uppfattningen vara ohållbar.

Haber har först framkastat den förmodan, att sorptionen skulle orsakas av restaffinitet, och stödde sig därvid på *Braggs* resultat av sina arbeten över röntgenspektra av kristaller. Utgående från samma förutsättningar har *Langmuir* (1918) utvecklat en ny, intressant teori för adsorptionsförloppet, som förtjänar att mera ingående refereras.

Atomerna i en kristall binda varandra med kemiska krafter, varvid de i ytskiktet belägna atomerna bli omättade utåt. På grund av den symmetriska anordningen av atomerna i en kristallyta uppkommer sålunda en eller flera slag av punkter, i vilka sinsemellan lika starka affinitetskrafter verka. *Langmuir* benämner dessa ställen elementarrum (elementary spaces). Vid varje elementarrum kunna en eller flera atomer eller molekyler adsorberas, varvid den fria affiniteten avmättas under ianspråktagande av den bundna molekylens bivalenser. Den kemiska kraften mellan en molekyl i ytan och en adsorberad molekyl är stor i jämförelse med kraften mellan två lika molekyler. De molekyler, som träffa den fria ytan, kvarbliva därför en jämförelsevis lång tid vid densamma, innan de åter avdunsta, under det de molekyler, som träffa en redan betäckt del av ytan, praktiskt taget reflekteras. Betecknas det antal grammolekyler, som under 1 sek. träffa 1 cm^2 av ytan, med μ och kondenseras därav en bråkdel α (nära lika med 1), så blir hastigheten, varmed kondensationen sker $= \alpha\mu$, om ytan är bar, men $\alpha\mu\theta$, om θ betecknar den obetäckta delen av ytan. Är antalet grammolekyler, som under 1 sek. avdunsta från 1 cm^2 yta $= \nu_1$, så är avdunstningshastigheten =

$= \nu_1 \theta_1$, då θ_1 är den betäckta delen av ytan. I jämvikt är

$$\alpha \mu \theta = \nu_1 \theta_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Nu är $$\theta + \theta_1 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \frac{\alpha \mu}{\nu_1 + \alpha \mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Den relativa livslängden σ_1 (tid i sekunder) av en adsorberad molekyl definieras så:

$$\sigma_1 = \frac{\alpha}{\nu_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \frac{\sigma_1 \mu}{1 + \sigma_1 \mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Är N_0 antalet elementarrum pr cm^2, N det Avogadriska talet ($6{,}06 \cdot 10^{23}$) och η det vid jämvikt adsorberade antalet grammolekyler, så är

$$N_0 \theta_1 = N \eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

och $$\eta = \frac{N_0}{N} \cdot \frac{\sigma_1 \mu}{1 + \sigma_1 \mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Definieras medellivslängden av de molekyler, som kondenseras vid den adsorberande ytan som $\frac{N_0}{N \cdot \nu_1}$, så är medellivslängden τ för de molekyler, som *slå ned* på densamma:

$$\tau = \frac{N_0 \alpha}{N \nu_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\therefore \quad \frac{\tau}{\sigma_1} = \frac{N_0}{N} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

och $$\eta = \frac{\tau \mu}{1 + \sigma_1 \mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

μ är proportionell mot trycket p och *Langmuir* sätter

$$\mu = \frac{p}{\sqrt{2 \pi M R T}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Vid mycket små tryck kan $\sigma_1 \mu$ i (10) försummas mot 1 och ekv. (10) reduceras till

$$\eta = \tau \mu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

eller *Henry's* lag. η varierar starkt med temperaturen, ty τ är omvänt proportionell mot ν_1 (se (8)).

Vid höga tryck åter kan 1 försummas mot $\sigma_1\mu$ och då blir

$$\eta = \frac{\tau}{\sigma_1} = \frac{N_0}{N} \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

Sorptionen uppnår ett mättningsvärde, som är oberoende av temperaturen.

För sorptionshastigheten erhålles lätt

$$N_0 \frac{d\theta'}{dt} = N(\alpha\mu\theta - \nu_1\theta') \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

där θ' är det i varje ögonblick rådande värdet på θ_1, den vid jämvikt betäckta delen av ytan. Genom att sätta $\theta = 1 - \theta'$, integrera och förenkla medelst (3) erhålles

$$\frac{N\nu_1(1+\sigma_1\mu)}{N_0} = \frac{1}{t} ln \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta'} \quad \ldots \ldots \quad (15).$$

Om vänstra ledet förenklas med tillhjälp av (4), (5), (6) erhålles

$$k = \frac{\alpha\mu}{\eta} = \frac{1}{t} ln \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta'} \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

Denna formel är identisk med *Lagergrens* formel för adsorptionshastigheten

$$k = \frac{1}{t} ln \frac{X}{X - x} \quad \ldots \ldots \quad (17),$$

där X är den vid jämvikt och x den vid varje ögonblick upptagna mängden.

Av (16) framgår, att konstanten k bör vara proportionell mot trycket och omvänt proportionell mot den upptagna mängden (vid jämvikt).

Dessa formler gälla det enklaste fallet, att den sorberande ytan endast har *ett* slag av elementarrum. *Langmuir* utvecklar nu teorien för det fall (II), att ytan har flera olika slag av elementarrum, (III) amorfa ytor, (IV) då ett elementarrum binder mer än en adsorberad molekyl, (V) atomisk adsorption och (VI) då adsorptionen sker i mer än ett skikt. Det skulle föra för långt att i detalj redogöra för teorien

för dessa olika fall, jag vill därför inskränka mig till att något beröra fall II och III, vilka torde vara de vanligast förekommande.

Finnas flera slag av elementarrrum, så utgöra dessa fraktionerna β_1, β_2, β_3 o. s. v. av ytan och

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots =1 \quad \ldots\ldots \quad (18).$$

Av varje fraktion är en viss del θ_1, θ_2, θ_3 o. s. v. vid jämvikt betäckt med molekyler;

$$\therefore \frac{N}{N_0}\eta=\beta_1\theta_1+\beta_2\theta_2+\beta_3\theta_3+\ldots \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

eller

$$\frac{N\eta}{N_0}=\frac{\beta_1\sigma_1\mu}{1+\sigma_1\mu}+\frac{\beta_2\sigma_2\mu}{1+\sigma_2\mu}+\frac{\beta_3\sigma_3\mu}{1+\sigma_3\mu}+\ldots \quad (20).$$

Är den fria affiniteten i de olika slagen av elementarrum markerat olika, så bli de tider, som molekylerna kvarhållas vid dem (σ_1, σ_2, σ_3 o. s. v.), även olika. Fraktionen β_1, som har det största värdet på σ_1, blir därför först betäckt, sannolikt innan sorptionen vid den 2:a och ännu mer vid de efterföljande fraktionerna β anta mätbara värden. Sorptionen sker vid växande tryck i bestämda steg.

Är sorbens ett amorft ämne (III), finnas oändligt många fraktioner $d\beta$, och

$$\frac{N\eta}{N_0}=\int_0^1\frac{\sigma\mu d\beta}{1+\sigma\mu} \quad \ldots\ldots \quad (21).$$

σ är då en funktion av β.

Ekvationen (6) kan skrivas:

$$x=\frac{abp}{1+ap} \quad \ldots\ldots \quad (22),$$

där x är den vid trycket p upptagna mängden. Sker sorptionen i lösning betyder p koncentrationen.

Ekv. (22) kan skrivas:

$$\frac{p}{x}=\frac{p}{b}+\frac{1}{ab} \quad \ldots\ldots \quad (22\,a).$$

Tecknar man således $\frac{p}{x}$ som en funktion av p erhålles en rät linje, varvid b och ab grafiskt kunna bestämmas. Ur

a och b kunna de proportionella storheterna σ och N_0 beräknas.

Langmuir har själv utfört en serie vackra försök över sorptionen av en del gaser i plana ytor av glimmer, glas och platina, vilka bevisa giltigheten av formel (22). Han beräknar ur sina resultat, att endast mellan 0,08 och 0,86 av den fria ytan i maximum blir betäckt med adsorberade molekyler. Den relativa livslängden av en adsorberad molekyl varierar mellan 10 000 och 740 000 sek., under det att den relativa livslängden av en gasmolekyl i vätskeytan mot mättad ånga är endast en bråkdel av en sekund.

Eucken (1914) och *Polányi* (1916) ha teoretiskt behandlat sorptionsproblemet, och den ledande tanken i dessa båda teorier är den, att adsorptionskraften är av fysikalisk art och att kraftens räckvidd är stor i jämförelse med molekylradien. *Eucken* har dock senare modifierat sin ståndpunkt, men, ehuru han finner frågan om kraftens natur delvis vara en definitionsfråga, så anser han dock av skäl, som jag nu ej kan gå in på, att den fysikaliska uppfattningen är att föredraga. Enligt dessa fysikaliska teorier uppnår det adsorberade skiktet en avsevärd tjocklek och tätheten avtager utåt ungefär som tätheten i atmosfären.

En av de viktigaste punkterna i sorptionsproblemet är därför att erhålla en noggrann kännedom om den sorberande ytans storlek och beskaffenhet.

Jag har beräknat en del av mig tidigare utförda försök över sorptionen av pikrinsyra i kol ur alkoholisk lösning medelst *Langmuirs* formel (22). Dessa försök omfatta två serier med vardera cirka 25 bestämningar. Vid teckning av $\frac{c}{x}$ och c (c är koncentrationen, här uttryckt i g pr g lösning) erhöllos kurvor, varav den ena visas i fig. 1. 3 à 4 punkter ligga i rät linje med varandra, varefter kurvan gör en krök och på så vis består av 7 à 8 rätliniga stycken. För vart och ett av dessa äro konstanterna a och b uträknade och värdena återgivas i tab. 1 (båda serierna).

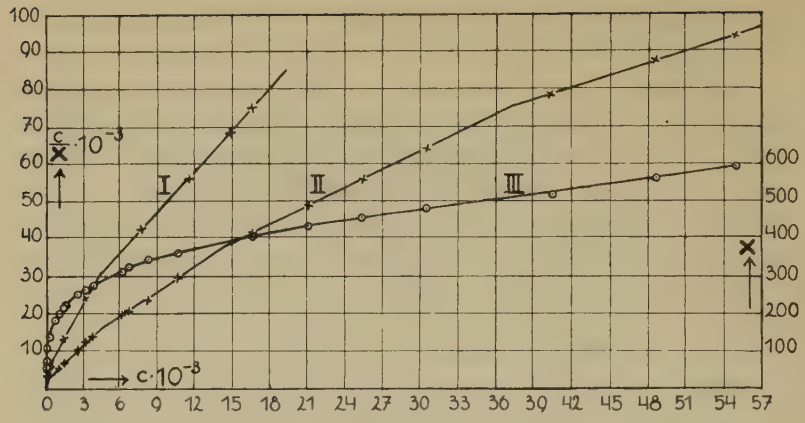


Fig. 1.

III är den vanliga sorptionsisotermen (x och c)
II och I kurvan $\left(\frac{c}{x} \text{ och } c\right)$, varav
I är den första delen i 10 ggr större skala än II.

Tab. 1.

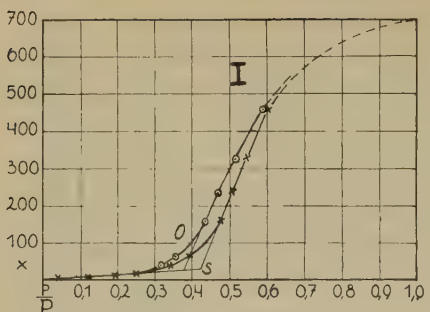
Kurv-del n:r	$1/b$		$1/ab \cdot 10^3$		b (prop. N_0)		a (prop. σ_1)		x (mg)	
	serie 1	serie 2	serie 1	serie 2	serie 1	serie 2	serie 1	serie 2	serie 1	serie 2
1	12,5	11,1	0	0	0,08	0,09	∞	∞	80	85
2	5,26	5,88	0,5	0,42	0,19	0,17	10 520	14 000	165	140
3	3,30	3,63	1,88	1,50	0,30	0,28	1 740	2 420	255	220
4	2,41	3,07	4,3	2,4	0,42	0,33	560	1 230	350	265
5	2,00	2,52	8,2	4,2	0,50	0,40	250	600	410	315
6	1,60	2,27	15,4	5,5	0,63	0,44	104	413	475	375
7	1,40	1,76	21,3	12,3	0,71	0,57	66	143	540	430
8	(0,87)	1,57	(45,3)	16,3	(1,15)	0,64	(19)	96	—	510
9		1,03		36,7		0,97		28		590

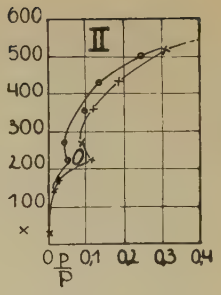
Av tabellen framgår, att de fraktioner av ytan, som de olika kurvdelarna motsvara, äro ungefär lika stora, under det σ är mycket stor för den första fraktionen och sedan hastigt avtar från fraktion till fraktion. *Sorptionen av pikrinsyra i kol visar därför en slående överensstämmelse med fall II eller III i Langmuirs teori.* Eftersom kolet är amorft, borde fall III vara det, som närmast skulle komma i fråga.

Försöket visar då, att fraktionernas antal är ändligt, vilket skulle kunna förklaras så, att kolmolekylkomplexen äga ett ändligt antal olika slag av elementarrum, i vilka affinitetskrafterna på grund av molekylernas konstitution äro olika stora men äga bestämda värden.

Den tysta förutsättningen vid denna diskussion har varit, att sorptionen endast sker i ett enkelt molekyllager, under det man i själva verket ej känner storleken av ytan hos 1 g kol. Ytan kan emellertid uppskattas och dess minimivärde angivas. Jag har utfört en sådan uppskattning för just den kolsort, som här använts, vilken är ett mycket aktivt sorptionskol, benämnt »Carbo animalis purissimus» från *Merck*. En utförlig redogörelse för hur denna uppskattning utförts skulle taga för stor plats i anspråk och jag måste därför inskränka mig till att i korthet angiva metoden och huvuddragen av de experimentella undersökningarna.

Beräkningen grundar sig på en av mig under de senaste åren utförd experimentalundersökning över sorptionen utav ångor av vatten, alkohol och ättiksyra i kol. Försöken ha utförts i en särskilt konstruerad vakuumapparat, varvid ångan tillfördes portionsvis till kolet och trycket observerades, tills jämvikt hade inträtt (i regel efter 1—2 tim.). Försökstemperaturen var 20°, 25°, 30° och 35°. Sorptionens storlek bestämdes genom vägning av kolet. De erhållna kurvorna hade ett mycket egendomligt utseende. Fig. 2 visar utseendet av tre isotermer med resp. vatten-, alkohol- och ättiksyreånga. Vid vattenisotermen ökar sorptionen långsamt med trycket (kurvan är en rät linje) upp till ett relativt tryck av 0,4 (den mättade ångans tryck = 1) och sedan hastigt (kurvan stiger brant och har det för en sorptionskurva vanliga utseendet). Alkohol- och ättiksyreisotermerna förlöpa i början ungefär lika som vattenisotermen, men vända, då trycket uppnått ett visst värde, varvid jämviktstrycket blir allt mindre, ju fler portioner ånga, som tillföras; därefter kröker kurvan ånyo och har i fortsättningen normalt förlopp.





×—×—× jämvikt vid upptagande av ånga.
o—o—o » vid avgivande av ånga.

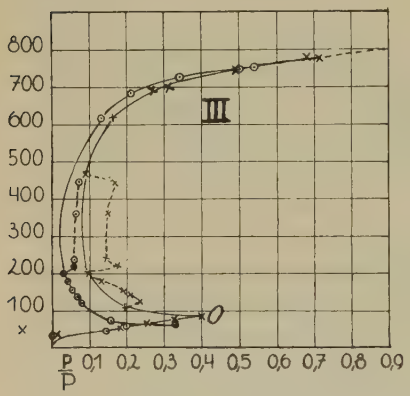


Fig. 2.

I Vattenisotermen 20°.
II Alkohol- » 30°.
III Ättiksyre- » 25°.

x = upptagen mängd pr g kol i mg.

$\frac{p}{P}$ = relativt ångtryck.

Förklaringen till dessa egendomliga förhållanden är följande. Först äger en verklig adsorption rum. Kolet är poröst och genomdraget av ytterst fina kapillärer. I dessa börjar så småningom kondensation av ånga att inträda och porerna fyllas med vätska. Den första delen av isotermen motsvarar en adsorptionsjämvikt, den senare delen från kröken (resp. vändpunkten) ett kapillärt upptagande av vätska i porerna. Avgörande för denna tolkning äro tre omständigheter. 1. Den första delen av isotermen genomlöpes reversibelt, under det upptagandet sedan sker under hysteresis, d. v. s. jämviktstrycket utfaller lägre, då jämvikten uppnås från andra hållet (kolet får avge ånga). 2. Sorptionshastigheten är alltid stor i början av upptagandet och betydligt större, då kolet avger ånga, än då ånga

upptages. 3. Upptagandet under de första 20—30 sekunderna, då ånga första gången tillföres till nytt kol sker enligt en på kinetiska åskådningar grundad formel, vilken lyder:

$$-\frac{dp}{dt} = k \cdot p(p - p\infty) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

eller integrerad

$$k = \frac{1}{t \cdot p\infty}\left(ln\frac{p}{p - p\infty} - ln\frac{p_0}{p_0 - p\infty}\right) \quad (23\,a),$$

vari p är tryckets värde i varje ögonblick, p_0 dess begynnelse- och $p\infty$ dess gränsvärde (i jämvikt, experimentellt bestämt). Jfr formler (16) och (17).

Betydelsen av punkterna 1 och 2 framgår av följande.

Jämviktstrycket vid det kapillära upptagandet bestämmes av meniskernas krökningsradie i kolets kapillärer. Då kolet får avge ånga, äro kolväggarna redan fuktade och meniskerna bli rundare och följaktligen stabilare än förut. (Det stabilaste tillståndet är uppnått, då väggarna äro fullständigt fuktade och krökningsradien = kapillärrörets radie.) Upptar kolet ånga, bli meniskerna plattare och en långsam stabiliseringsprocess vidtager. Kolväggarna vätas, varigenom krökningsradien hos meniskerna minskas. Härigenom minskas trycket och mera ånga kondenseras, varefter ovan beskrivna förlopp upprepas o. s. v.

Hysteresisfenomenet beror därpå, att vid sorptionen kolväggarna aldrig vätas fullständigt, varför en konstant differens i tryck uppträder, då ånga avgives ur resp. upptages av kolet.

Sorptionsprocessen med kol motsvarar fullständigt samma förlopp med geler som sorbens. Det klassiska exemplet är *van Bemmelens* Wässerungs- och Entwässerungsdiagram för kiselsyregel. Förhållandena för geler ha sedan utretts av *Zsigmondy*, *Bachmann*, *Anderson* m. fl.

Anderson (egentligen först *Trouton*) har uppställt en formel för beräkning av kapillärrörsradien, då ångtrycksnedsättningen i kapillärerna är känd. Med användning av denna

formel har jag beräknat kapillärradierna vid olika värden på den upptagna vätskemängden (olika relativa tryck). Det visade sig då, *att lika stora vätskevolymer alkohol och ättiksyra nådde upp i lika vida kapillärer.*[1] Sedan hålkärlsvolymen experimentellt bestämts, kunde minimivärdet av kapillärernas sammanlagda begränsningsyta (den inre ytan) beräknas under antagande att hela kolvolymen vore genomdragen i alla tre huvudriktningarna av lika vida kapillärer. Då vi nu veta huru stor del av hela hålrumsvolymen, som utgöres av kapillärer med en given vidd, kan den verkliga ytan (minimivärdet) tillnärmelsevis beräknas. Tabell 2 visar resultatet av denna beräkning. Värdena i kolumn 1 ange hela den inre ytan, om samtliga kapillärer ha den i kol. 2 angivna genomskärningsradien. Kol. 3 visar, hur stor del av hela hålrumsvolymen, som är fylld vid motsvarande

Tab. 2.

Inre ytan i m^2	Kapillärrörsradien $r \cdot 10^8$ cm	Med sorberad vätska upptagen del av hålrumsvolymen	Beräknad yta av 1 g kol i m^2		
			min.	max.	medeltal
100	123,5	—	10	50	30
500	24,7	90 %	25	50	35
1 000	12,4	85 %	100	200	150
2 000	6,2	75 %	320	480	400=615
3 000	4,1	59 %	390	520	455
4 000	3,1	46 %	320	400	360
5 000	2,5	38 %	300	360	330
6 000	2,1	32 %	1 920	1 920	1 920=3 680

[1] Försöken med vatten visa i många avseenden avvikande resultat, vilka här ej kunna diskuteras. Orsaken till avvikelserna ligger i vattnets förhållande mot kol, som vätes oerhört mycket långsammare av vatten än av alkohol och ättiksyra Vatten tränger ej heller in i de finaste kapillärerna, vilket bevisas av följande experimentellt funna värden på kolets täthet, bestämd i nämnda tre vätskor:

vatten	1,80
alkohol	1,92
ättiksyra	1,94

Vidare är den maximalt upptagna vattenmängden cirka 10 % mindre än motsvarande siffror för alkohol och ättiksyra.

värden på r. I sista kol. äro slutligen uppförda min.-, max.- och medelvärdena på ytan för de olika fraktionerna av kapillarvolymen.

Ännu, då 75 % av hålrumsvolymen är fylld med vätska, som alltså når upp i kapillärer med en vidd av cirka $12 \cdot 10^{-8}$ cm eller 3—4 ggr en molekyldiameter, är alltså den för adsorption fria ytan > 600 m^2. I intet fall räcker den vid kröken av sorptionsisotermen (se fig. 2) upptagna (alltså till största delen adsorberade) mängden till att bilda *mer* än ett enkelt molekylskikt på den fria kolytan, och vid de ovan relaterade försöken med pikrinsyra var den maximalt sorberade mängden 3 à 4 ggr för liten för att kunna bilda ett sådant skikt.

Under antagande, att även andra sorters sorptionskol ha en yta av omkring 600 m^2 pr g kol, har jag i sorptionslitteraturen ej kunnat finna något exempel på en sorption med kol som sorbens, där den sorberade mängden bildar ett monomolekylärt lager, som täcker hela denna yta. Detta gäller, vilket måste särskilt betonas, om sorptionen verkligen består i ren adsorption. Sorptionsförsök med kondenserbara ångor få då ej medräknas, ty denna process är ej en adsorption utan ett kapillarfenomen. Sorptionsförsök med kol ge således vid handen, att adsorptionen sker i ett enkelt molekylskikt, vilket onekligen talar för *Langmuirs* adsorptionsteori. Kolytans beskaffenhet är emellertid ej känd och exakta värden på ytans storlek kunna därför ej erhållas. Det är då av intresse att undersöka sorptionen i andra fall, där storleken av ytan hos sorbens kan beräknas.

Sorptionslitteraturen är ej rik på sådana exempel. Jag har redan nämnt *Langmuirs* egna försök över sorptionen i plana ytor av glimmer, glas och platina. På härvarande biokemiska institut har utförts en serie försök över sorptionen av elektrolyter, av vilka jag i detta sammanhang särskilt vill nämna försöken med kvicksilverdroppar som sorbens, då ytans storlek i detta fall med största sannolikhet kan exakt beräknas. Försöken utfördes så, att Hg-

droppar fingo falla genom en till $^3/_4$ mättad lösning av HgCl. Den sorberade mängden var ungefär 4 ggr för liten för att bekläda ytan med ett enkelt molekylärt lager.[1]

Två vidare exempel på sorption, varvid den sorberande ytan är approximativt känd, ha givits av *Odén*. I det ena fallet undersöktes saltbindningsförmågan hos kolloidalt svavel, varav *Odén* framställde flera fraktioner med nära konstant partikelstorlek. Vid en viss salthalt koagulerade svavelsolen och den sorberade NaCl-mängden bestämdes. För de högdispersa solerna räckte ej saltmängden till att bilda ett enkelt molekyllager på partiklarnas yta, men med den svavelsol, som innehöll de största partiklarna, bildade det sorberade saltet, utbrett i ett enkelt molekyllager, en yta, 23 % större än partiklarnas yta. Den beräknade ytstorleken är dock ett minimivärde, i det att partiklarna äro tänkta som klotformiga.

I det andra fallet undersökte *Odén* sorptionen av $Ba(NO_3)_2$ på $BaSO_4$-kristaller, vilkas storlek han bestämde genom att mäta deras fallhastighet i vatten. Här har för ytan beräknats ett utpräglat minimivärde och den verkliga ytan är säkerligen flera gånger större, även om storleksordningen är den rätta. Det vid mättningskoncentration extrapolerade värdet på den upptagna mängden är ungefär 5 ggr större än som behövs för att bilda ett enkelt molekyllager på den till 3 m^2 beräknade ytan av 1 g $BaSO_4$.[2]

Här förtjänar påpekas en iakttagelse av *Odén*, att väl Ba-nitrat men ej Sr-nitrat sorberas av $BaSO_4$, under det att Sr-sulfatet sorberar Sr-nitrat men ej Ba-nitrat. *Odén* förmodar, att konfigurationen i ytan av $BaSO_4$-kristallerna lämnar hålrum just passande till Ba-atomer. En liknande iakttagelse gjorde *Marc*, nämligen att rombiskt $BaCO_3$ sor-

[1] Nya, pågående försök över sorptionen vid plana (polerade) guldblad peka i samma riktning.

[2] Helt nyligen har publicerats en avhandling av *Paneth*, som medelst en synnerligen intressant metod (sorption av en radioaktiv isotop) lyckats beräkna ytans storlek hos vissa kristallpulver. Vid de ovan omtalade försöken av *Marc* över sorptionen av färgämnen i kristaller ($PbSO_4$) var vid maximal sorption den sorberande ytan endast till 30 % betäckt med ett enmolekylärt skikt.

berar K-nitrat men ej Na-nitrat, under det att det romboedriska $CaCO_3$ sorberar $NaNO_3$ men ej KNO_3. *Marc* tänkte sig detta bero på förmågan hos isomorfa salter att bilda blandkristaller. Dessa försök tala således för *Langmuirs* teori, då ju sammanhållningskraften i en kristall, som förut nämnts, är att anse som orsakad av bivalenser.

Till slut vill jag endast i korthet peka på en del rön rörande sorptionsisotermernas förlopp vid sorptionen av salter med en gemensam jon. Intressanta arbeten på detta område ha utförts av *Schilow och Lepin* samt *Odén och Anderson* och *Odén och Langelius.*

Så erhöllo de sistnämnda serier av varandra liknande sorptionskurvor vid sorptionen av alkalinitraten, alkalihalogenerna och nitraten av de alkaliska jordartsmetallerna. Varierades däremot anionen, så förlöpte kurvorna oregelbundet och till och med korsade varandra. Dock är att märka, att de likartat byggda salterna K_2SO_4 och K_2CrO_4 gåvo likartade eller s. k. affina kurvor (ordinatorna vid samma koncentrationer proportionella), liksom KNO_3 och $KClO_3$. *Schilow och Lepin* indelade på detta sätt syrorna i grupper av typerna $H_3XO_3 \longrightarrow H_3XO_4 \longrightarrow H_2XO_4 \longrightarrow HXO_3 \longrightarrow HXO_4$. Inom varje grupp voro sorptionsisotermerna av samma art och sorptionens storlek ändrade sig regelmässigt med anionens molekylvikt.

Frågan om sorptionskraftens storlek står därför som synes i intimt samband med frågan om molekylernas konstitution och törhända skall det en gång lyckas att visa sambandet mellan restaffinitet och adsorption.

Trots den redan mycket rikhaltiga sorptionslitteraturen erbjuder således sorptionsproblemet ännu åtskilligt av intresse, och det är ovedersägligt, att den *Langmuir*ska teorin har kommit med en hel del mycket intressanta uppslag och synpunkter vid behandlingen av detta så aktuella problem.

Några undersökningar över lösta ämnens diffusion.

Av A. FRENDEL.

I.

Hur fördelar sig koncentrationen i en diffusionscylinder?

I häftet n:r 3 för i år av denna tidskrift har jag redogjort för en undersökningsmetod, som tillåter bestämma med stor noggrannhet den vägsträcka, som en löst substans diffunderar under olika tider. Dessutom undersökte jag, vilket inflytande storleken av koncentrationen vid diffusionspelarens bas hade på den tillryggalagda väglängden. Jag fann, att väglängden (v) kunde uttryckas genom formeln

$$v = k \cdot \sqrt[3]{c} \cdot \sqrt{t}$$

där k är en konstant, c koncentrationen vid basen av diffusionspelaren och t den tid, under vilken diffusionen varat. Att vägen är direkt proportionell mot kubikroten ur koncentrationen vid basen, kan man ju också uttrycka så, att *vägen är omvänt proportionell mot det lineära avståndet mellan partiklarna vid diffusionscylinderns bas.*

När jag, med denna formel som utgångspunkt, ville försöka beräkna den substansmängd av det lösta ämnet, som passerat genom ett visst tvärsnitt av diffusionscylindern under en viss tid, så visade det sig, att dessa beräkningar vilade på mer eller mindre lösa antaganden, så länge lagen för koncentrationsfördelningen inom diffusionspelaren var obekant. Jag företog mig därför att försöka utröna denna.

Följande resonnemang ligger därvid nära till hands (se fig. 1, där avståndet från basen är abscissa och koncentrationen ordinata): Under inflytande av koncentrationen c vid diffusionscylinderns bas har diffusionen på en viss tid

sträckt sig till punkten A, eller sträckan v. Antag att koncentrationen i ett godtyckligt skikt (B) av pelaren, som ligger på avståndet x från basen eller v_1 från spetsen, är y. Då kan jag med samma rätt säga, att diffusionen har på samma tid sträckt sig från B till spetsen, eller sträckan v_1, under inflytande av koncentrationen y.

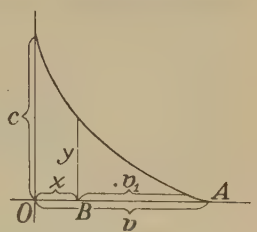


Fig. 1

Då fås enligt nyssnämnda formel:

$$v_1 = k \cdot \sqrt[3]{y}; \quad v = k \cdot \sqrt[3]{c}$$

eller genom division:

$$\frac{y}{c} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^3.$$

I ord uttryckt: *Koncentrationerna i två olika skikt av en och samma diffusionscylinder förhålla sig till varandra som kuben på de båda skiktens avstånd till spetsen.*

(Man kan även säga: De lineära avstånden mellan partiklarna sinsemellan i olika skikt av en diffusionspelare äro omvänt proportionella mot de respektive skiktens avstånd till diffusionspelarens spets, eller: Produkten av grannpartiklarnas inbördes avstånd och dessa partiklars avstånd till diffusionspelarens spets är konstant för alla punkter inom en och samma diffusionspelare.)

Det matematiska uttrycket för koncentrationsfördelningskurvan blir med de använda beteckningarna:

$$y = \left(\frac{v - x}{v}\right)^3 \cdot c \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

eller,

$$y = \left(1 - \frac{x}{v}\right)^3 \cdot c \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

För att experimentellt pröva riktigheten av detta resonnemang gick jag till väga på följande sätt: Jag lät under några dagar en diffusionspelare av kaliumpermanganat utbilda sig i en mätcylinder med destillerat vatten. På bottnen fanns gott om kristaller, så att lösningen var där hela tiden mättad. Vid analyseringen av koncentrationerna tog

jag ut med tryckpipett små mängder från olika djup, alltid lika mycket (c:a 0,34 cm^3), spädde ut alla proven till ungefär samma koncentration och titrerade till avfärgning med en surgjord lösning av ferrosulfat. Resultatet av en sådan analys synes i tab. 1, och grafiskt i fig. 2.

Längdenheterna i tabellen äro cm^3-strecken på mätcylinderns skala. Som mått på koncentrationerna i de olika skikten tar jag antalet cm^3 av $FeSO_4$ som åtgick för avfärgningen. Kristallgröten sträckte sig upp till strecket 2 i mätcylindern. Detta räknar jag därför som diffusionscylinderns bas.

Vid analystillfället (efter c:a 7 dygn) hade diffusionen sträckt sig till strecket 67, alltså var vägen 65 längdenheter. Den observerade koncentrationen vid basen var 29,02. Jag kan med tillhjälp av endast dessa båda uppgifter räkna ut, hur stor koncentrationen bör vara i varje särskilt skikt, under förutsättning av att den ovan förmodade koncentrationsfördelningen råder och kan sedan jämföra dessa beräknade värden med de genom analysen erhållna.

Jag har (enl. formeln $v = k \cdot \sqrt[3]{c}$):

$$65 = k \cdot \sqrt[3]{29{,}02}; \quad \therefore \; k = 21{,}151.$$

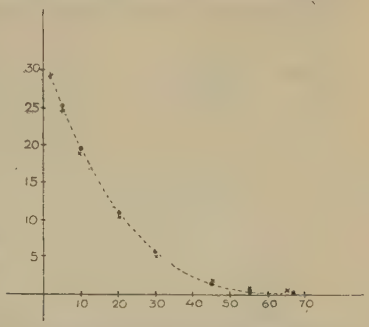
Tab. 1.

v	$v_1 = 67 - v$	$\frac{v_1}{k}$	Beräkn. konc. $= \left(\frac{v_1}{k}\right)^3$	Observerad konc.	Absol. fel.
65	2	0,095	0,001	0,10	+ 0,099
55	12	0,567	0,18	0,42	+ 0,24
45	22	1,04	1,12	1,30	+ 0,18
30	37	1,75	5,36	5,03	— 0,33
20	47	2,22	10,94	10,19	— 0,75
10	57	2,69(5)	19,57	19,34	— 0,23
5	62	2,93	25,15	24,68	— 0,47
2	65	3,07(3)	29,62	29,02	± 0

Som synes av tabellen är det största absoluta felet 0,75 för den beräknade koncentrationen 10,94. Detta gör ett relativt fel på 6,9 % av det beräknade värdet. Jag skulle tro, att försöksfelen vid fyllandet och tömmandet av tryck-

pipetten torde kunna uppgå till detta belopp för den ifrågavarande koncentrationen.

Som synes av diagrammet ansluter sig annars den beräknade kurvan bra till de observerade koncentrationerna. Nära spetsen bli emellertid de observerade värdena för höga. Det absoluta felet är visserligen icke stort, men för t. ex. 12 längdenheter från spetsen blir ju det observerade värdet 0,42 och det beräknade endast 0,18. Detta kan icke bero på något analysfel. En av orsakerna till att man får för höga värden på koncentrationen nära spetsen är den, att det alltemellanåt utbildas en eller annan liten luftblåsa på bottnen av cylindern, som efter en viss tid lösgör sig och beger sig uppåt genom vattenmassan, medförande litet färg. På vägen upp »tvättas» den, men något färg följer med ända upp, och detta är skälet, varför vattnet är något litet färgat även ovanför diffusionspelarens spets. Koncentrationen ovanför spetsen var vid mitt försök emellertid mindre än den minsta mätbara, motsvarande 1 droppe $FeSO_4$ eller c:a 0,04 cm^3. Tager man till försöket vanligt vattenledningsvatten, som i allmänhet håller mycket luft löst, bli luftblåsorna så talrika, att försöket spolieras.



(De runda punkterna, som ligga på den streckade kurvan, beteckna de beräknade koncentrationerna, korspunkterna de observerade.)

Fig. 2.

Ett annat skäl, som kanske medverkar till att koncentrationen vid spetsen blir högre än den teoretiskt beräknade ligger i saltets växande dissociation i lösning vid större utspädning. Man har ju trott sig finna, att diffusionskonstanten växer med fortskridande dissociation, och då bör ju detta medföra en utdragning av kurvan åt höger för de lägsta koncentrationerna. Vilken av dessa båda orsaker som spelar den största rollen för avvikelsen i fråga vågar jag inte fälla något omdöme om.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Från 1922 års läraremötes matematisk-fysiska sektion.

Vid sektionens sammanträden fattades följande beslut:

1. Om mot förmodan skolkommissionens förslags huvudgrunder skulle vinna statsmakternas bifall, så önskar sektionen, att beträffande matematiken följande detaljförändringar måtte vidtagas:
   a) att planimetrin måtte på gymnasiet behandlas i sammanhang med trigonometrin.
   b) att de lärjungar i den föreslagna 4:e klassen i realskolan, som läsa latin, icke måtte få någon avkortad kurs i matematik.
   c) att i instruktionen för censorerna vid studentexamen sådana bestämmelser inflyta, att i problemen för studentexamen endast ytterst enkla exponentialekvationer må förekomma, och att högregradsekvationer och -ekvationssystem samt trigonometriska ekvationer göras enkla. På reallinjen bör den tid, som eventuellt inbesparas genom nyssnämnda förenklingar användas till en kort kurs i integralräkning.
   d) att matematiken på latinlinjens schema gives ett tillräckligt timtal för att kunna utgöra ett fullgott stöd för fysikundervisningen.
2. *a*) För realskolan böra kursplanerna i fysik göras något utförligare, och i de metodiska anvisningarna några bestämda demonstrationer och laborationer anbefallas.
   b) För realgymnasiet och det nyspråkliga gymnasiet bör målet för fysikundervisningen även upptaga tekniska tillämpningar.

*

De förenade matematisk-fysiska och biologisk-kemiska sektionerna gjorde följande uttalande:

Sektionerna anse, att fyrtiominuterslektioner i allmänhet äro otillräckliga, och detta i all synnerhet för de naturvetenskapliga ämnena. Femminutersraster äro av nästan intet värde, då lärjungarna på denna tid knappast hinna mer än att gå upp- och nedför trapporna. För de naturvetenskapliga ämnena förslå ej heller fem minuter för läraren att framtaga erforderliga apparater.

Matematiska uppgifter.

121) En person lyfte i en engelsk bank pengar på en check. Emellertid råkade kassören av misstag kasta om £ och sh. På hemvägen gjorde han ett inköp för 2 sh. 6 d., och fann sedan vid hemkomsten, att han hade kvar jämnt dubbelt så mycket som checkens hela belopp. Hur stort var detta? (1 £ = 20 sh. = 240 d.) *G. Lindborg.*

122) Inom vilket område får h ligga för att bråket

$$y = \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1}$$

för alla reella x-värden skall ligga mellan $+3$ och -3?

123) Sök orten för normalens från medelpunkten fotpunkt på en rörlig ellipskorda, som synes under rät vinkel från medelpunkten.

124) Uttryck vinkeln vid spetsen i en likbent triangel såsom funktion av de inskrivna och omskrivna cirklarnas radier.

125) A, B, C, D äro i ordning 4 punkter på en rät linje. När finnes en punkt från vilken AB, BC och CD synas under lika vinklar?

126) Om cirklar uppritas på en fyrhörnings sidor som diametrar, och likaledes på den linje som förenar diagonalernas mittpunkter, så är summan av en godtycklig punkts potenser med avseende å de förstnämnda cirklarna lika med 4 gånger samma punkts potens med avseende å den sistnämnda.

Lösningar till uppg. i häft. 3. 1921—22.

109) *Två plan P och Q skära varandra under vinkeln v. En linje a i P gör med planens skärningslinje vinkeln α. Hur stor vinkel gör den med sin projektion i Q? Och hur stor är denna projektion?*

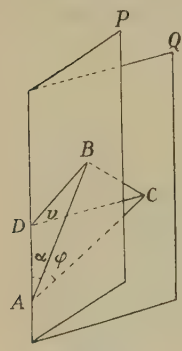


Fig. 1.

Låt linjen AB vara a, där A utan minskning av generaliteten kan ligga på planens skärningslinje AD. Fäll från B en linje $BC \perp Q$ och från C linjen $CD \perp AD$. Drag BD och AC. Då är planet $BDC \perp AD$ och således $BD = a \sin \alpha$ och $BC = a \sin \alpha \sin v$. Vi få således, om φ är den sökta vinkeln,

$$\sin \varphi = \sin \alpha \sin v$$

och projektionen

$$x = a \cos \varphi = a\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}.$$

Anm. Man kan även lösa satsen med analytisk rymdgeometri, men detta blir snarast blott en översättning av den geometriska lösningen. Med hjälp av den sfäriska trigonometrins satser blir satsen självklar.

Löst av »*Iter*».

110) *Diskutera fullständigt problemet: Sök orten för medelpunkten till en cirkel, som tangerar två givna cirklar.*

1. Två fasta cirklar (grundcirklarna) med mp. O, O_1 och radierna r, r_1 $(r > r_1)$ äro givna. Låt avståndet OO_1 vara $= f$, $r + r_1 = s$, $r - r_1 = d$.

Låt vidare M vara mp. till en cirkel, som tangerar de givna cirklarna i T och T_1. Vi kunna då i vardera tangeringsp. T, T_1 särskilja tre olika slag av tangering, alltefter punktens M läge på radierna OT, OT_1, nämligen, vad först beträffar punkten T,

A) M ligger på radiens OT förlängning utåt, över T (konvex tangering),

B) M ligger på radien OT mellan O och T (konkav inre tangering) och

C) M ligger på radiens OT förlängning bakåt, över O (konkav yttre tangering).

Betecknas det variabla avståndet OM med ϱ och cirkelns M radie med R, erhålles, alltefter tangeringens art, olika uttryck för R enligt nedanstående tabell:

Tabell 1.

A)	$R = \varrho - r,$
B)	$R = r - \varrho,$
C)	$R = \varrho + r.$

I T_1 blir förhållandet enahanda, och vi kunna sålunda i olika fall tänka oss uppträdandet av flera eller färre av nio olika cirkelskaror M, symboliskt betecknade

$(A \circ A)$, $(A \circ B)$, $(A \circ C)$, $(B \circ A)$, $(B \circ B)$, $(B \circ C)$, $(C \circ A)$, $(C \circ B)$, $(C \circ C)$.

På grund av antagandet $r > r_1$ bortfaller cirkelskaran $(C \circ B)$. De återstående cirkelskarorna kunna aldrig uppträda samtidigt, utan alltefter grundcirklarnas inbördes lägen, uppträda olika system av grundcirklarna tangerande cirkelskaror.

Tagas O, O_1 till poler för ett dipolärt koordinatsystem (ϱ, ϱ_1), kunna vi för de tre huvudfallen uppställa följande schema:

Tabell 2.

I. $f > s$ (*grundcirklarna falla helt utom varandra*).

$$\left.\begin{array}{ll} (A \circ A) & R = \varrho - r = \varrho_1 - r_1 \\ (C \circ C) & R = \varrho + r = \varrho_1 + r_1 \end{array}\right\} \quad \varrho - \varrho_1 = \pm d \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (A \circ C) & R = \varrho - r = \varrho_1 + r_1 \\ (C \circ A) & R = \varrho + r = \varrho_1 - r_1 \end{array}\right\} \quad \varrho - \varrho_1 = +s \qquad (2)$$

II. $s > f > d$ (*grundcirklarna skära varandra*).

$$\left.\begin{array}{ll} (A \circ A) & R = \varrho - r = \varrho_1 - r_1 \\ (B \circ B) & R = r - \varrho = r_1 - \varrho_1 \\ (C \circ C) & R = \varrho + r = \varrho_1 + r_1 \end{array}\right\} \quad \varrho - \varrho_1 = \pm d \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (A \circ B) & R = \varrho - r = r_1 - \varrho_1 \\ (B \circ A) & R = r - \varrho = \varrho_1 - r_1 \end{array}\right\} \quad \varrho + \varrho_1 = s \qquad (3)$$

III. $f < d$ (*cirkeln* O_1 *omslutes av cirkeln* O).

$$(B \circ A) \quad R = r - \varrho = \varrho_1 - r_1 \quad \varrho + \varrho_1 = s \qquad (3)$$

$$(B \circ C) \quad R = r - \varrho = \varrho_1 + r_1 \quad \varrho + \varrho_1 = d \qquad (4)$$

I tabell 2 angives i kolumnen längst till vänster arten av de uppträdande cirkelskarorna. I mittkolumnen angives det ur tabell 1 erhållna dubbla uttrycket för radien R. I kolumnen längst till höger angives den ur det dubbla uttrycket för R erhållna ekv. för punkten M i det valda koordinatsystemet.

I fallet I uppträda fyra olika cirkelskaror. Medelpunkterna för den första cirkelskaran ligga på den ena branchen och medelpunkterna för den andra cirkelskaran på den andra branchen av hyperbeln (1). Mp. för den tredje cirkelskaran ligga på den ena branchen och mp. för den fjärde cirkelskaran på den andra branchen av hyperbeln (2).

I fallet II uppträda fem cirkelskaror, av vilka den andra kan betraktas såsom en direkt fortsättning av den första. Mp. för de båda första ligga på den ena branchen och mp. för den tredje på den andra branchen av hyperbeln (1). Mp. för de båda återstående cirkelskarorna ligga på ellipsen (3).

Övergången mellan cirkelskarorna $(A \circ A)$ och $(B \circ B)$ å ena sidan och $(A \circ B)$ och $(B \circ A)$ å den andra sker genom grundcirklarnas skärningspunkter, vilka sålunda tillhöra den sökta orten.

I fallet III uppträda endast två cirkelskaror. Mp. för dessa ligga på var sin av ellipserna (3), (4).

I samtliga här betraktade fall utgöres sålunda den sökta

orten av två konfokala kägelsnitt. Av tabell 2 framgår, att cirkelskaror med *likartad* tangering vid båda grundcirklarna ge upphov till hyperbler. Vid *olikartad* tangering uppträda dels hyperbler, dels ellipser, det senare vid uppträdande B-tangering vid ena grundcirkeln.

För kägelsnittens axellängder gälla formlerna

$$\begin{cases} 2a = r \pm r_1, \\ 2b = \sqrt{(r \pm r_1)^2 - f^2}. \end{cases}$$

Av uttrycket för b framgår omedelbart, i vilka fall ellipser och vilka fall hyperbler uppträda. I förra fallet är uttrycket för b reellt, i senare fallet imaginärt.

2. Om grundcirklarna tangera varandra utantill ($f=s$), uppträda samtliga under I och II angivna cirkelskaror, undantagandes ($B \circ B$). På grund av Eukl. I: 20 kunna ekv. (2) och (3) tydligen icke gälla för någon punkt utanför linjen OO_1. Å andra sidan gäller (3) för alla punkter på OO_1 mellan O och O_1 och (2) för alla punkter på förlängningen av OO_1 åt ena eller andra hållet. I detta fall övergår sålunda det ena kägelsnittet i linjen OO_1, vilken rätteligen är att anse dubbel. Man ser även, huru övergången äger rum. Allteftersom grundcirklarnas tangering åvägabringas från fallet I eller II, uppkomma vid övergången antingen strålarna från O och O_1 utåt såsom hoptryckta hyperbelbrancher eller sträckan OO_1 själv såsom en sammantryckt ellips.

En liknande övergång äger rum, om grundcirklarna tangera varandra innantill ($f=d$). I detta fall uppträda samtliga under II och III angivna cirkelskaror, undantagandes ($A \circ B$). Den sökta orten utgöres sålunda i detta fall av ellipsen (3) och linjen OO_1 (räknad dubbelt).

3. I fallen I och II närma sig brancherna av hyperbeln (1) för $r_1 \to r$ mer och mer räta linjen $\varrho = \varrho_1$ (mittpunktsnormalen till OO_1), med vilken de för $r_1 = r$ slutligen sammanfalla.

4. Om grundcirklarna äro lika stora och tangera varandra (utantill), kommer enligt det föregående den sökta

orten att utgöras av två mot varandra vinkelräta linjer, nämligen linjen OO_1 och tangenten i grundcirklarnas gemensamma punkt (båda att betrakta såsom dubbla).

5. Om grundcirklarna äro koncentriska (specialfall av III), sammanfalla ellipsernas (3), (4) brännpunkter, och den sökta orten utgöres sålunda i detta fall av två koncentriska cirklar $\varrho = \frac{1}{2}s$, $\varrho = \frac{1}{2}d$ (rätteligen är i detta fall även cirklarnas gemensamma mp. att betrakta såsom en den sökta orten tillhörande oändligt månfaldig punkt, i det att varje med de två grundcirklarna koncentrisk cirkel tangerar de båda grundcirklarna i de oändligt avlägsna imaginära cirkelpunkterna).

För $r_1 \longrightarrow r$ kommer cirkeln $\varrho = \frac{1}{2}s$ att mer och mer närma sig de båda grundcirklarna, under det att cirkeln $\varrho = \frac{1}{2}d$ mer och mer sammankrymper. Vid gränsen blir problemet dock i detta fall obestämt, emedan varje punkt i planet kan tagas till mp. för två cirklar, som tangera de båda sammanfallande grundcirklarna.

6. För $r_1 \longrightarrow 0$ komma de båda den sökta orten konstituerande kägelsnitten att mer och mer närma sig varandra, tills de vid gränsen slutligen sammanfalla.

För $r \longrightarrow r_1 \longrightarrow 0$ komma båda kägelsnitten att mer och mer närma sig mittpunktsnormalen, med vilken de vid gränsen sammanfalla.

7. Sedan vi i det föregående funnit, att den sökta orten utgöres av två konfokala kägelsnitt, av vilka det ena (eller båda) i speciella fall kan övergå i en rät linje (rättare två sammanfallande räta linjer), kunna vi även på följande sätt bestämma arten av de i olika fall uppkommande kägelsnitten:

Bland individerna i de grundcirklarna tangerande cirkelskarorna ingå även grundcirklarnas gemensamma tangenter. Man inser utan vidare, att de uppkommande kägelsnittens asymptoter utgöras av de genom mittpunkten mellan O och O_1 mot de gemensamma tangenterna dragna vinkelräta linjerna. I fallet I äro grundcirklarnas gemensamma tangenter samtliga reella, och detta är sålunda fallet även med asymptoterna till de uppkommande kägelsnitten, var-

av följer, att den sökta orten i detta fall utgöres av två hyperbler. I fallet II äro två av de gemensamma tangenterna reella och två imaginära. Detsamma är förhållandet med asymptoterna till de uppkommande kägelsnitten, av vilka det ena sålunda är en hyperbel, det andra en ellips. I fallet III äro samtliga asymptoter imaginära och de uppkommande kägelsnitten sålunda ellipser. Om grundcirklarna tangera varandra (utantill eller innantill), sammanfalla de båda asymptoterna i det ena asymptotparet, varav följer, att det ena kägelsnittet urartar. Detsamma är förhållandet för $r_1 = r$. Om slutligen grundcirklarna äro koncentriska, utgöras de gemensamma tangenterna av de isotropa linjerna genom den gemensamma mp., och då riktningarna av dessa linjer äro invarianta för ändliga vridningar, äro även de uppkommande kägelsnittens asymptoter isotropa och kägelsnitten sålunda cirklar.

8. I samtliga hittills betraktade fall äro de uppkommande kägelsnitten centriska. Detta måste givetvis alltid vara förhållandet, så länge grundcirklarnas mp. O och O_1 ligga inom ändligt område. Tänka vi oss åter O förflyttad mot ∞-linjen, under det att cirkeln själv går genom en fast punkt N på OO_1, förflyttas de uppkommande kägelsnittens gemensamma medelpunkt ävenledes mot ∞-linjen, och kägelsnitten antaga mer och mer formen av parabler, vartill de vid gränsen slutligen övergå. Samtidigt övergår cirkelns O synliga del till en mot OO_1 vinkelrät linje genom N. Parablernas styrlinjer ligga på var sin sida om denna linje, på avståndet r_1 därifrån. Endast i det fallet, att punkten N tillhör cirkeln O_1, utgöres den sökta orten av linjen OO_1 och en parabel. »*Iter*».

(Även löst av »*X*».)

111) *Bevisa att uttrycken* $3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13$ *och* $3^{2n+3} + 40n - 27$ *äro delbara med 64.*

Beviset kan baseras på följande allmänna delbarhetskriterium:

Om $f(n+1) - f(n) \equiv 0 \,(mod.\ p)$, *och om därjämte* $f(n_0) \equiv 0 \,(mod.\ p)$, *så är* $f(n) \equiv 0 \,(mod.\ p)$.

Det är redan av den fullständiga induktionen tydligt, att $f(n) \equiv 0 \pmod{p}$ för alla heltalsvärden $n > n_0$. Då vidare även $f(n) - f(n+1) \equiv 0 \pmod{p}$, är saken tydligen giltig även för $n < n_0$.

I den givna uppgiften föreligga funktionerna

$$f(n) = 3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13;$$
$$\varphi(n) = 3^{2n+3} + 40n - 27.$$

Man finner omedelbart, att båda uttrycken försvinna för $n=0$. Vidare är

$$f(n+1) - f(n) = 2^4 \cdot 3^{2n} \cdot 5(3^{2n+1} + 1);$$
$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = 2^3(3^{2n+3} + 5).$$

Då nu

$$3^{2n+1} + 1 = 3(9^n - 1) + 4 \equiv 0 \pmod{4}$$

och

$$3^{2n+3} + 5 = 3(9^{n+1} - 1) + 8 \equiv 0 \pmod{8},$$

så är vardera funktionens första differens delbar med 2^6, varmed satsen är bevisad. »*Iter*».

(Även löst av »*X*».)

112) *Varje punkt på den mellanskrivna sfären till en reguljär tetraeder har den egenskap, att summan av dess potenser med avseende å de sfärer, som uppritas på tetraederns kanter såsom diameter, är lika med 0.*

A. *Analytiskt bevis.*

Vi taga höjdernas skärningspunkter till origo för ett rätvinkligt koordinatsystem, vars x axel och y-axel ligga parallellt med två motstående kanter AB, CD, och vars z-axel sålunda sammanfaller med den mot dessa kanter vinkelräta linjen. Tages för enkelhetens skull kantens längd till längdenhet, är avståndet mellan motstående kanter $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ och hörnens koordinater

$$A\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right),$$
$$B\left(-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right),$$
$$C\left(0, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right),$$
$$D\left(0, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right).$$

Koordinaterna för kanternas mittpunkter äro

$$\begin{aligned}
M_{AB}&(0, 0, \tfrac{1}{4}\sqrt{2}),\\
M_{CD}&(0, 0, -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}),\\
M_{AC}&(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 0),\\
M_{BD}&(-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, 0),\\
M_{AD}&(\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, 0),\\
M_{BC}&(-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 0),
\end{aligned}$$

och ekv. för de över kanterna såsom diametrar beskrivna sfärerna

$$\begin{aligned}
(AB)\quad & x^2 + y^2 + (z-\tfrac{1}{4}\sqrt{2})^2 - \tfrac{1}{4} = 0,\\
(CD)\quad & x^2 + y^2 + (z+\tfrac{1}{4}\sqrt{2})^2 - \tfrac{1}{4} = 0,\\
(AC)\quad & (x-\tfrac{1}{4})^2 + (y-\tfrac{1}{4})^2 + z^2 - \tfrac{1}{4} = 0,\\
(BD)\quad & (x+\tfrac{1}{4})^2 + (y+\tfrac{1}{4})^2 + z^2 - \tfrac{1}{4} = 0,\\
(AD)\quad & (x-\tfrac{1}{4})^2 + (y+\tfrac{1}{4})^2 + z^2 - \tfrac{1}{4} = 0,\\
(BC)\quad & (x+\tfrac{1}{4})^2 + (y-\tfrac{1}{4})^2 + z^2 - \tfrac{1}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Orten för en punkt, så belägen, att summan av dess potenser med avseende å nämnda sfärer är=0, erhålles genom addition av dessa ekv. Utföres denna addition, erhålles (efter division med 6)

$$x^2 + y^2 + z^2 - \tfrac{1}{8} = 0,$$

vilket är ekv. för den mellanskrivna sfären. »*Iter*».

B. *Geometriskt bevis.*

Om O är tetraederns centrum, A och A_1, B och B_1, C och C_1 mittpunkterna av motstående kanter, och kantlängden a, så är

$$d = AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

AA_1, BB_1, CC_1 dela varandra mitt itu i O. Betrakta nu en godtycklig sfär med centrum i O och en punkt P på densamma. Summan s av P:s potenser med avseende på de i ex. angivna sfärerna blir då

$$s = \overline{PA}^2 + \overline{PA_1}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PB_1}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PC_1}^2 - 6\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

eller enl. mediansatsen

$$s = 3\left(2\overline{PO}^2 + \frac{d^2}{2}\right) - 6\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 6PO^2 + \frac{3d^2}{2} - \frac{3a^2}{2} \quad . \quad (2).$$

Alltså är s konstant, då PO är konstant, d. v. s. var P än väljes på sfären. För den mellanskrivna sfären är speciellt $PO = \frac{d}{2}$ och alltså

$$s = 6\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{3d^2}{2} - \frac{3a^2}{2} = 3\left(d^2 - \frac{a^2}{2}\right) = 0 \text{ enl. (1).}$$

»X».

113) *Hur stor behöver excentriciteten hos en ellips vara, för att däri skall kunna inskrivas en parallellogram med en spetsig vinkel, vars tangent är μ?*

Enär de två sidorna måste vara supplementarkordor, hava vi, om k och k_1 äro deras vinkelkoefficienter,

$$\begin{cases} \dfrac{k - k_1}{1 + kk_1} = \mu \\ kk_1 = -\dfrac{b^2}{a^2}. \end{cases}$$

Härur fås $\left.\begin{matrix} k \\ -k_1 \end{matrix}\right\} = \dfrac{\mu(a^2 - b^2) \pm \sqrt{\mu^2(a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2a^2}$.

För reella värden fordras således:

$$[\mu(a^2 - b^2) + 2ab][\mu(a^2 - b^2) - 2ab] \geqq 0.$$

Men då första faktorn alltid är positiv, så är det nödvändiga och tillräckliga villkoret:

$$\mu \geqq \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{2\sqrt{1 - e^2}}{e^2}.$$

Således:

$$\mu^2 e^4 + 4e^2 - 4 \geqq 0$$

eller $[\mu^2 e^2 + 2(1 + \sqrt{\mu^2 + 1})] \cdot [\mu^2 e^2 + 2(1 - \sqrt{\mu^2 + 1})] \geqq 0.$

Men då här första faktorn är positiv, blir således vill-

koret

$$e^2 \geqq \frac{2(\sqrt{\mu^2+1}-1)}{\mu^2},$$

vilket är det sökta villkoret.

Sättes här $\mu = \operatorname{tg} v$ (v en spetsig vinkel), så fås genom en enkel trigonometrisk transformation villkoret till

$$e^2 \geqq \frac{\cos v}{\cos^2 v/2},$$

vilket ger t. ex. för

$v=90°$ $e^2 \geqq 0$

$v=60°$ $e^2 \geqq 2/3 = 0{,}667$

$v=45°$ $e^2 \geqq 2(\sqrt{2}-1) = 0{,}828$

$v=30°$ $e^2 \geqq 2(2\sqrt{3}-3) = 0{,}928$

$v=0°$ $e^2 \geqq 1$ (orimligt).

Löst av »*X*» och »*Iter*».

114) *Att genom en given punkt på en cirkel med radien r draga en korda, så att summan av kordan och dess avstånd från medelpunkten blir = m. Diskussion!*

P är den givna punkten, O cirkelns centrum. Drag OPX och vinkelrätt däremot OY; avsätt $OA = m$ åt P till och $OB = \frac{m}{2}$ på OY. Om AB skär cirkeln i Q, är den mot OQ vinkelräta kordan genom P en lösning. I förhållande till axlarna OX, OY har nämligen Q koord. $(r\cos x,\ r\sin x)$, om $\angle POQ = x$. Därav

$$\frac{r\cos x}{m} + \frac{r\sin x}{\frac{m}{2}} = 1$$

eller $r\cos x + 2r\sin x = m$,

vilken likhet för spetsig vinkel x just innebär den önskade egenskapen hos kordan. Avsättes OB åt rakt motsatt håll på OY, erhållas kordor, som ligga symmetriskt

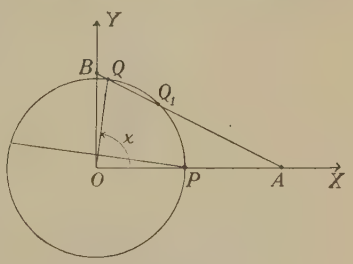


Fig. 2.

med de redan funna med avseende på OP. Då endast spetsiga vinklar x motsvara problemet, få vi följande diskussion, när m från små värden växer, medan r tänkes konstant, varvid AB förflyttas med bibehållen riktning:

1. $m < r$. *Ingen lösning.*
2. $m = r$. *En lösning*, ehuru kordan reducerar sig till tang. i P.
3. $r < m < 2r$. Då faller ena skärningspunkten på första kvadranten. *Två lösningar.*
4. $m = 2r$. Då faller en skärningspunkt i B, och diametern PO tillkommer. Således *tre lösningar.*
5. $2r < m < r\sqrt{5}$. Då ligga bägge skärningspunkterna på första kvadranten och äro distinkta. *Fyra lösningar.*
6. $m = r\sqrt{5}$. Då tangerar AB cirkeln. *Två lösningar.*
7. $m > r\sqrt{5}$. Då råkar AB ej cirkeln. *Ingen lösning.*

Anm. På analogt sätt kan man lösa den allmännare uppgiften: Att draga en korda genom P så, att kordans längd (l) och avstånd från centrum (p) uppfylla en relation av typen $\alpha \cdot p + \beta \cdot l = m$, där α och β äro godtyckliga konstanter. Man behöver blott avsätta $OA = \frac{m}{\alpha}$ och $OB = \frac{m}{2\beta}$.

»X».

(Även löst av »*Iter*».)

Annan lösning.

Givet: En cirkel med radien r, en punkt A på cirkellinjen och en begränsad rät linje $FG = m$.

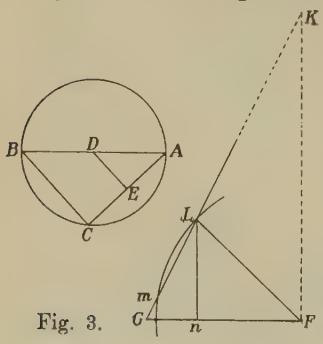


Fig. 3.

Konstruktion: Från ena ändpunkten F på FG drages en normal $FK = 2FG$. Lägg en rät linje genom G och K. Tag F till medelpunkt för en cirkellinje med radien $2r$. Antag att cirkellinjen skär GK, i L och m. (I de fall, då två skärningspunkter finnas, benämnas i det följande den övre L och den nedre m.) Drag normalen Ln mot FG.

I den givna cirkeln drages en diameter AB från A. Avsätt i B $\angle ABC = \angle FLn$. Låt vinkelbenet BC skära cirkellinjen i C. ($\angle FLn < 90°$.) Drag AC.

Påstående: AC är den sökta kordan.

Bevis: Enär KF och Ln äro parallella, är

$$\triangle KFG \sim \triangle LnG.$$

Men $$FG = \tfrac{1}{2}FK.$$

$$\therefore \quad nG = \tfrac{1}{2}nL.$$

Vidare är $$FL = AB.$$

$$\angle FLn = \angle ABC;$$

$$\angle FnL = \angle ACB = 90°.$$

$$\therefore \quad \triangle FLn \cong \triangle ABC.$$

Drages från cirkelns medelpunkt D normalen DE mot AC, blir

$$DE = \tfrac{1}{2}BC = \tfrac{1}{2}Ln = nG.$$

Nu är $$AC = Fn;$$

$$DE = nG;$$

$$\therefore \quad AC + DE = Fn + nG = m. \qquad V.\ s.\ b.$$

Diskussion: Den med medelpunkt i F dragna cirkellinjen

1) råkar icke GK om $2r < \dfrac{2m}{\sqrt{5}}$.

2) tangerar GK om $2r = \dfrac{2m}{\sqrt{5}}$.

3) Skär GK om $2r > \dfrac{2m}{\sqrt{5}}$.

Vid 3) kunna flera fall inträffa.

a) Båda skärningspunkterna falla mellan G och K.
b) L faller mellan G och K, m sammanfaller med G.
c) L faller mellan G och K, m på andra sidan G från K räknat.
d) L sammanfaller med K, m faller utanför G.
e) L faller utanför K från G räknat, m utanför G.

Antalet lösningar framgår av följande

Tabell.

	r och m	Lösning för L	Lösning för M	Anmärkningar
1.	$2r < \frac{2m}{\sqrt{5}}$	0	0	——
2.	$2r = \frac{2m}{\sqrt{5}}$	1		L och m sammanfalla.
3*a*.	$m > 2r > \frac{2m}{\sqrt{5}}$	1	1	——
b.	$m = 2r$	1 *	1	* AC är diametern AB. DE blir punkten D.
c.	$2m > 2r > m$	1	0	——
d.	$2m = 2r$	1 *	0	* AC reduceras till punkten a. DE är radien DA.
e.	$2m < 2r$	0	0	——

Då vinkeln ABC kan avsättas på båda sidor om AB, finnas symmetriska lösningar till alla ovannämnda utom de med * utmärkta.

Punkten L i 3*e*. leder till lösningen av ett problem som erhålles, om i det givna orden »summan av kordan och dess avstånd från medelpunkten» ersättas med »skillnaden mellan kordans avstånd från medelpunkten och kordan».

För punkten m i 3*c*, d och e ersättas nämnda ord med »skillnaden mellan kordan och dess avstånd från medelpunkten». *»Arbo».*

Anm. För att få en överblick över de sökta kordornas lägen för olika värden på m tänka vi oss A såsom centrum för ett strålknippe. Det gives då ett strålpar AR, AR', för vilket m är ett maximum ($=r\sqrt{5}$). Avståndet från cirkelns mp. O mot strålarna AR, AR' är $=\frac{1}{4}$ av strålarnas

längd, räknat från A till skärningspunkten med cirkeln. Vardera strålen AR, AR', bildar sålunda med mittstrålen AX (cirkelns diameter genom A) en vinkel, vars trig. tangent är $= \frac{1}{2}$, och strålarna AR, AR' bilda sålunda med varandra en vinkel RAR', vars trig. tangent är $= \frac{4}{3}$.

Det gives vidare bortom strålarna AR, AR', från mittstrålen räknat, ett strålpar AS, AS', för vilket $m =$ cirkeldiametern $(= 2r)$. Avståndet från O mot strålarna AS, AS' är $= \frac{2}{3}$ av strålarnas längd, och vardera strålen AS, AS' bildar sålunda med mittstrålen AX en vinkel, vars trig. tangent är $= \frac{4}{3}$. Vinklarna XAS, XAS' halveras sålunda av var sin av strålarna AR, AR'.

För varje värde på m, liggande inom intervallen $r\sqrt{5} > m > 2r$, finnas två motsvarande strålpar. Strålarna i det ena paret falla inom var sin av vinklarna RAS, RAS', under det att det andra strålparet faller inom vinkeln RAR'. När m minskar från maximivärdet mot värdet $2r$, vrida sig strålarna i det ena strålparet från lägena AR, AR' mot lägena AS, AS', under det att strålarna i det andra strålparet vrida sig i motsatt riktning från lägena AR, AR' mot mittstrålen. När de förstnämnda strålarna intagit lägena AS, AS', sammanfalla de senare med mittstrålen, och samtliga strålar ha då vridit sig lika stora vinklar.

Mot varje värde på m, liggande inom intervallen $2r > m > r$, svarar endast ett strålpar, vars strålar falla mellan var sin av strålarna AS, AS' och tangenten i punkten A. »*Iter*».

Prisuppgift för 1922—23.

För lärjungar vid allmänna läroverk, tekniska skolor o. d.

Det finnes ett, och endast ett kvadrattal, sådant, att det endast har 4 från noll skilda siffror. Talets båda första siffror äro sinsemellan lika, och likaledes de båda sista.

Bevisa detta! Och uppgiv om möjligt någon eller några snarlika uppgifter.

Tävlan står öppen för alla lärjungar vid allmänna läroverk, seminarier, tekniska skolor och med dessa likställda. Tävlingsskrift insändes före d. 1 mars 1923. Den tävlandes namn, läroanstalt och klass meddelas. Prenumeration å tidskriften fordras ej för deltagande i tävlan.

Om lämpliga tävlingsskrifter inkomma, så utdelas tre pris, bestående av värdefulla arbeten i Matematik, Fysik eller Kemi. *Red.*

Frågor och svar.

Fråga: Bör man skriva: »10 l mjölk *kosta* 3 kr. 50 öre» eller »*kostar* 3 kr. 50 öre». *L. H.*

Svar: När man i denna betydelse talar om 10 l, så tänker man ej på de särskilda litrarna, utan man menar »en kvantitet av 10 l». Det rätta är därför »kostar». I motsatt fall borde det även stå 10 litrar. Så t. ex. i satsen: »På sjukhuset funnos gömda i sängarna ej mindre än 10 litrar med brännvin.» 10 l brännvin skulle giva en annan mening, och då bör det stå »*fanns gömt* i sängarna». Likaledes t. ex.: »Vid auktionen *inflöt* ej mindre än 10 000 kronor» men om man säger »I inträdesavgifter vid utställningen *inflöto* ej mindre än 10 000 kr.», så tänker man på de särskilda kronorna, som varje besökande betalade. På samma sätt t. ex.: »Hundra kronor *kunna* utväxlas mot en hundrakrona», men »Hundra kronor *är* en icke obetydlig summa». *M—r.*

En geometrisk användning av de komplexa talen.

Av X.

Vi utgå från en triangel $A_0B_0C_0$ med sidorna $B_0C_0=a_0$, $C_0A_0=b_0$, $A_0B_0=c_0$ och motstående vinklarna α, β, γ resp. På sidan B_0C_0 uppritas utåt den liksidiga triangeln $B_0C_0A_1$ och inåt den likaledes liksidiga $B_0C_0A_1'$. Först söka vi uttryck för $l_0=A_0A_1$ och $l_0'=A_0A_1$. Enligt cosinusteoremet erhålles ur trianglarna $A_0B_0A_1$ och $A_0B_0A_1'$ [1]

$$l_0^2=a_0^2+c_0^2-2a_0c_0\cos\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)=a_0^2+c_0^2-a_0c_0\cos\beta+a_0c_0\sin\beta\sqrt{3},$$

$$l_0'^2=a_0^2+c_0^2-2a_0c_0\cos\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=a_0^2+c_0^2-a_0c_0\cos\beta-a_0c_0\sin\beta\sqrt{3}.$$

Emedan $2a_0c_0\cos\beta=a_0^2+c_0^2-b_0^2$ och den giva triangelns yta

$$T_0=\frac{a_0c_0\sin\beta}{2},$$

få vi

$$l_0^2=\frac{a_0^2+b_0^2+c_0^2}{2}+2\sqrt{3}T_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

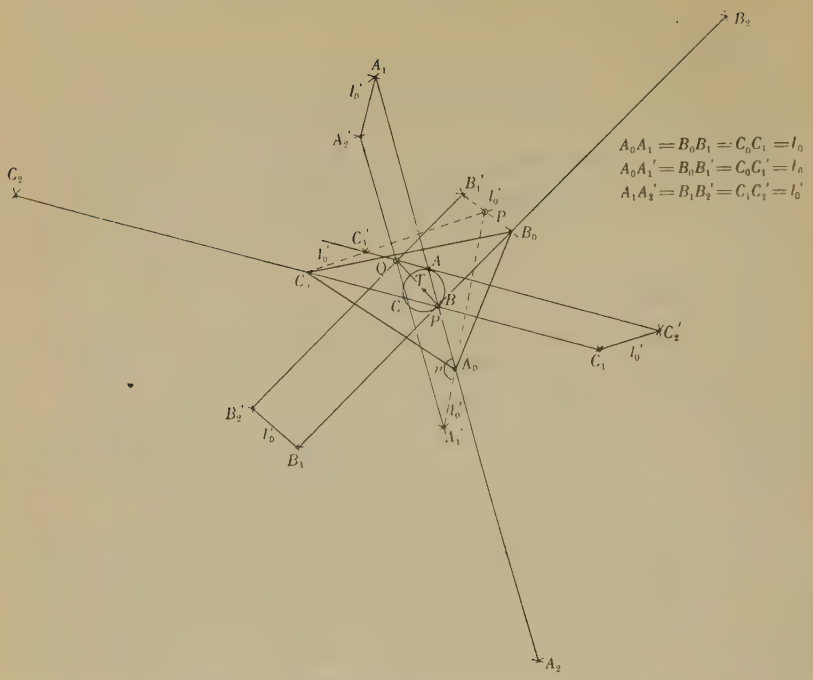
$$l_0'^2=\frac{a_0^2+b_0^2+c_0^2}{2}-2\sqrt{3}T_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Av uttryckens symmetriska byggnad följer att

$$A_0A_1=B_0B_1=C_0C_1 \text{ och } A_0A_1'=B_0B_1'=C_0C_1',$$

där B_1, B_1' och C_1, C_1' erhållas genom analoga konstruktioner med utgående från C_0A_0, A_0B_0 resp. Vi observera, *att* $l_0>l_0'$ *för en egentlig triangel* $A_0B_0C_0$ $(T_0>0)$.

[1] Formlerna gälla tydligen även, om $\beta+\frac{\pi}{3}>\pi$ eller $\beta-\frac{\pi}{3}<0$.



I det följande antages triangeln $A_0B_0C_0$ placerad i det Gauss'ska talplanet så, att omloppsriktningen $A_0 \rightarrow B_0 \rightarrow C_0$ överensstämmer med den positiva riktningen för argumentbestämningen (motsols enligt vedertaget bruk). De mot A_0, B_0, C_0 svarande talen äro x_0, y_0, z_0 resp. Vi upprita liksidiga trianglar *utåt* med den givna triangelns sidor som baser: $B_0A_1C_0$ på B_0C_0, $C_0B_1A_0$ på C_0A_0 och $A_0C_1B_0$ på A_0B_0. De mot A_1, B_1, C_1 svarande talen betecknas med x_1, y_1, z_1. Först härleda vi sambanden mellan de 6 talen x_0, ..., z_1.

Om $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, blir $e^{\frac{\pi i}{3}} = e^{\frac{4\pi i}{3} - \pi i} = -\varepsilon^2$ och $e^{-\frac{\pi i}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3} - \pi i} = -\varepsilon$;

vidare gäller $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ . . . . . (3)

A_1 erhålles nu genom en vridning av B_0C_0 omkring B_0

vinkeln $\frac{\pi}{3}$ i negativ led. Därav följer enligt Moivres teorem:

$$x_1 = y_0 + e^{-\frac{\pi i}{3}}(z_0 - y_0) = y_0 - \varepsilon(z_0 - y_0) =$$
$$= (1+\varepsilon)y_0 - \varepsilon z_0 = -\varepsilon^2 y_0 - \varepsilon z_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varsigma)$$

Genom cyklisk förskjutning erhålles vidare:

$$y_1 = -\varepsilon x_0 - \varepsilon^2 z_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varsigma)$$

$$z_1 = -\varepsilon^2 x_0 - \varepsilon y_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varsigma)$$

Ersättes i ekv. (ς) ε överallt med ε^2, erhållas de mot A_1', B_1', C_1' svarande talen x_1', y_1', z_1'; A_1 och A_1' ligga symmetriskt med avseende på B_0C_0 o. s. v.

Alltså, emedan $\varepsilon^3 = 1$,

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= -\varepsilon y_0 - \varepsilon^2 z_0 \\ y_1' &= -\varepsilon^2 x_0 - \varepsilon z_0 \\ z_1' &= -\varepsilon x_0 - \varepsilon^2 y_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varsigma')$$

Vi härleda nu några egenskaper hos vår konfiguration med hjälp av dessa formler.

1. Trianglarna $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, $A_1'B_1'C_1'$ ha alla samma tyngdpunkt, ty genom addition erhålles ur (ς), (ς') och (3)

$$\frac{x_0+y_0+z_0}{3} = \frac{x_1+y_1+z_1}{3} = \frac{x_1'+y_1'+z_1'}{3}.$$

2. Linjerna A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 äro parallella och lika stora med var sin av sidorna i en triangel, ty ur föreg. ekv. följer

$$(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0) + (z_1 - z_0) = 0.$$

Detsamma gäller för A_0A_1', B_0B_1', C_0C_1'.

3. Vi bilda nu

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_0 &= -(x_0 + \varepsilon^2 y_0 + \varepsilon z_0) \\ y_1 - y_0 &= -\varepsilon(x_0 + \varepsilon^2 y_0 + \varepsilon z_0) \\ z_1 - z_0 &= -\varepsilon^2(x_0 + \varepsilon^2 y_0 + \varepsilon z_0) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Därav följer, emedan $|\varepsilon| = 1$, att som vi redan funnit

$$|x_1 - x_0| = |y_1 - y_0| = |z_1 - z_0| = l_0.$$

Detsamma följer därav, att $y_1 - y_0 = \varepsilon(x_1 - x_0)$, $z_1 - z_0 = \varepsilon^2(x_1 - x_0)$, (vilket innebär, att A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 äro parallella

med sidorna i en *liksidig* triangel, ty skillnaden mellan dessa linjers argument blir då $\pm\frac{2\pi}{3}$), om man beaktar resultatet 2.

4. Det inverkar ej på slutsatserna i 3, om ε utbytes mot ε^2. Alltså gäller att A_0A_1', B_0B_1', C_0C_1' äro parallella och lika med sidorna i en liksidig triangel, vars sida vi ovan tecknat l_0'.

5. Linjerna A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 råkas i *samma* punkt. Då A_0A_1 och B_0B_1 ej äro ∥:a, kunna vi antaga triangeln förskjuten, så att dessa linjers skärningspunkt P faller i origo. Vi kunna alltid antaga att P ej faller i A_0 eller B_0. Detta inträffar, om $\sphericalangle$ A eller B är $\frac{2\pi}{3}$. Då blir saken självklar. Faller P i C_0 är saken klar[1]; eljest finnas alltid två *reella* tal λ och μ, så att $x_1=\lambda x_0$, $y_0=\mu y_0$ ($x_0, \ldots$ betyda här de tal, som svara mot $A_0, \ldots$ i det nya läge vi här för ett ögonblick förpassat figuren i). Satsen är bevisad, så snart vi ådagalagt existensen av ett tredje *reellt* tal ν, för vilket $z_1=\nu z_0$. Detta är emellertid lätt gjort. Elimineras nämligen x_0, y_0, z_0 ur

$$\lambda x_0 - x_1 = \lambda\, x_0 + \varepsilon^2 y_0 + \varepsilon\, z_0 = 0$$
$$\mu y_0 - y_1 = \varepsilon\, x_0 + \mu\, y_0 + \varepsilon^2 z_0 = 0$$
$$\nu z_0 - z_1 = \varepsilon^2 x_0 + \varepsilon\, y_0 + \nu\, z_0 = 0$$

erhålles enl. (3) $\lambda\mu\nu - \lambda - \mu - \nu + 2 = 0,$

vilket visar, att ν är reellt om λ och μ äro det. Då $z_0 \neq 0$ enl. ant., kan ν ej försvinna ur denna relation.

Samma sats gäller för A_0A_0', B_0B_1', C_0C_1', om vi undantaga det fall, då $A_0B_0C_0$ är liksidig. Då sammanfalla A_0 och A_1', B_0 och B_1', C_0 och C_1', vadan de tre linjerna äro fullständigt obestämda.

Vi upprepa nu våra konstruktioner med $A_1B_1C_1$ som utgångstriangel och erhålla de nya hörnen A_2, B_2, C_2 och

[1] $\gamma=\frac{2\pi}{3}$.

dessas symmetripunkter A_2', B_2', C_2' med avs. på B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 resp. Man behöver blott ersätta x_0, y_0, z_0 med resp. x_1, y_1, z_1 i (ς) och (ς_1) för att erhålla de motsvarande talen $x_2, \ldots, z_2$. Ur (4), (ς) och (ς′) erhålles

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_1 &= -(x_1 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon z_1) = +2(x_0 + \varepsilon^2 y_0 + \varepsilon z_0) = -2(x_1 - x_0) \\ y_2 - y_1 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = -2(y_1 - y_0) \\ z_2 - z_1 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = -2(z_1 - z_0) \end{aligned}\right\} (5)$$

och

$$\left.\begin{aligned} x_2' - x_1 &= -(x_1 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 z_1) = -(x_0 + \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 z_0) = x_1' - x_0 \\ y_2' - y_1 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = y_1' - y_0 \\ z_1' - z_2 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = z_1' - z_0 \end{aligned}\right\} (5')$$

d. v. s.

$$\left.\begin{aligned} A_1A_2 = l_1 &= |x_2 - x_1| = 2|x_1 - x_0| = 2l_0 \\ A_1A_2' = l_1' &= |x_2' - x_1| = |x_1' - x_0| = l_0' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Emedan $l_0 > l_0'$ blir $l_1 > l_1'$. *Genom upprepning av* (ς) *erhållas alltså de tal* x_2, y_2, z_2, *som svara mot de utåt upprätade trianglarnas hörn* A_2, B_2, C_2. x_2', y_2', z_2' motsvara symmetripunkterna. Detta innebär tydligen att $A_0B_0C_0$ och $A_1B_1C_1$ ha samma (positiva) omloppsriktning.

6. A_0, A_1, A_2 *ligga i rät linje,* A_0 *mitt emellan* A_1 *och* A_2. Detsamma gäller för B_0, B_1, B_2 och C_0, C_1, C_2.

Följer omedelbart ur $x_2 - x_1 = -2(x_1 - x_0)$ o. s. v. i (5).

7. A_1' *och* A_2' *ligga på en med* A_0P *parallell linje, likaså* B_1 *och* B_2 *på en linje* $\parallel B_0P$ *och* C_1', C_2' *på en linje* $\parallel C_0P$. Detta är en följd av likheterna $x_2' - x_1 = x_1' - x_0$ o. s. v., vilka betyda, att A_0A_1' är parallell, likriktad och lika med A_1A_2'.

8. *Linjerna* $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$, $C_1'C_2'$ *råkas i samma punkt* Q. Detta kan bevisas på ett sätt analogt med det i (5) använda. Jag föredrager emellertid följande geometriska bevis. Om mittpunkterna till B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 betecknas med resp. A, B, C och genom A, B, C dragas linjerna $AR \parallel A_0P$, $BR \parallel B_0P$, $CR \parallel C_0P$, råkas dessa tre linjer i R. För att inse detta behöver man blott betrakta den i skalan $-\frac{1}{2}$

med avseende på tyngdpunkten T till $A_0B_0C_0$ med den ursprungliga likställda figuren. Då A_0P och $A_1'A_2'$ ligga symmetriskt i förhållande till $\bar{A}R$[1] o. s. v., följer vår sats. *T, P, R, Q ligga i rät linje, R mitt emellan P och Q. Om T är tyngdpunkten till $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, är $PR=\frac{3}{2}PT$ och alltså $PQ=3PT$.*

9. $PQ=l_0'=3PT$. Då enligt (4) BP_0 och C_0P framgå ur A_0P genom vridningar omkring P på $\frac{2\pi}{3}$ resp. $\frac{4\pi}{3}$, kunna vi, om origo placeras i P och reella axeln längs A_0P, sätta $x_0=k$, $y_0=l\varepsilon$, $z_0=m\varepsilon^2$, där *k, l, m äro reella tal.* T motsvarar då talet $\frac{k+l\varepsilon+m\varepsilon^2}{3}$, medan enl. (5') $l_0'=|k+l\varepsilon^2+m\varepsilon|$. Om $\varepsilon=s+ti$, är $\varepsilon^2=s-ti$, och $PT=\frac{1}{3}\sqrt{[k+(l+m)s]^2+(l-m)^2t^2}$, medan $l_0'=\sqrt{[k+(l+m)s]^2+(m-l)^2t^2}$. Alltså $l_0'=3PT$.

Upprepas samma konstruktioner med utgående från $A_2B_2C_2$ ge de utåtriktade trianglarna $A_3B_3C_3$ och de inåtriktade symmetripunkterna $A_3'B_3'C_3'$. På samma sätt $A_4B_4C_4$ och $A_4'B_4'C_4'$ ur $A_3B_3C_3$ o. s. v. Vi få följande ekvationer:

$$\begin{cases} x_1-x_0 &= x_1-x_0 \\ x_2-x_1 &= -2(x_1-x_0) \\ x_3-x_2 &= (-2^2)(x_1-x_0) \\ \vdots & \\ x_n-x_{n-1} &= (-2)^{n-1}(x_1-x_0) \\ x_{n+1}-x_n &= (-2)^n(x_1-x_0) \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} l_0 &= l_0 \\ l_1 &= 2l_0 \\ l_2 &= 2^2l_0 \\ \vdots & \\ l_{n-1} &= 2^{n-1}l_0 \\ l_n &= 2^nl_0 \end{cases} \quad \ldots \quad (7)$$

samt $$x_1'-x_0=x_2'-x_1'=\ldots$$
$$x_{n+1}'-x_n \text{ och } l_0'=l_1'=\ldots=l_{n-1}'=l_n';$$
$$l_n=A_nA_{n+1},\ l_n'=A_nA_{n+1}'.$$

$A_0A_1, \ldots, A_n$ ligga på A_0P så, att A_{r-1} ligger mitt emellan A_r och A_{r+1}; $B_0, \ldots, B_n$ på motsv. sätt på B_0P och $C_0, \ldots, C_n$ på C_0P. $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ ligga på $A_1'Q$ så att $A_0A_1', A_1A_2', \ldots$

[1] Emedan $\bar{A}$, A_1, A'_1 ligga i rät linje, $A_1\bar{A}=A'_1\bar{A}$ och $A'_1A'_2 \parallel A_0P$.

$A_{n-1}A_n'$ äro lika långa, parallella och likriktade. På motsv. sätt $B_1', \ldots, B_n'$ på $B_1'Q$ och $C_1', \ldots C_n'$ på $C_1'Q$.

10. $x_n = x_0 + \frac{1-(-2)^n}{3}(x_1 - x_0)$, $y_n = y_0 + \frac{1-(-2)^n}{3}(y_1 - y_0)$, $z_n = z_0 + \frac{1-(-2)^n}{3}(z_1 - z_0)$, som man finner genom addition ur ovanstående likheter.

$x_n' = x_{n-1} + x_1' - x_0 = x_{n-1} - (x_0 + \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 z_0)$ o. s. v. enl. (5').

11. Om sidorna i $A_nB_nC_n$ betecknas med a_n, b_n, c_n, är sammanlagda ytan av de på sidorna uppritade liksidiga trianglarna

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(l_n^2 + l'^2_n) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2^{2n} l_0^2 + l_0'^2) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{2^{2n}+1}{2}(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) + 2\sqrt{3}(2^{2n}-1)T_0\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

enl. (1), (2), (7).

12. Triangeln $A_nB_nC_n$ har ytan

$$T_n = \frac{1}{4\sqrt{3}}(l_n^2 - l'^2_n) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{2^{2n}-1}{2}(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) + 2\sqrt{3}(2^{2n}+1)T_0\right) \quad . \quad . \quad (9)$$

enl. samma formler.

13. Vi vilja även beräkna a_n^2. Om vinkeln $A_1A_0A_1'$ är v, har man, emedan A_1A_1' är dubbla höjden i en liksidig triangel med sidan a_0

$$(a_0\sqrt{3})^2 = l_0^2 + l'^2_0 - 2l_0 l_0' \cos v$$

och

$$(a_n\sqrt{3})^2 = l_n^2 + l'^2_n - (-1)^n 2 l_n l_n' \cos v =$$
$$= 2^{2n} l_0^2 + l'^2_0 - 2(-2)^n l_0 l_0' \cos v.$$

Därav följer

$$3a_n^2 - (-2)^n 3a_0^2 = [2^{2n} - (-2)^n] l_0^2 + [1 - (-2)^n] l'^2_0 \quad . \quad (10')$$

och

$$a_n^2 = (-2)^n a_0^2 + \frac{((-2)^n - 1)^2}{6}(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) +$$
$$+ \frac{(2^{2n}-1)2\sqrt{3}\,T_0}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Analoga formler gälla för b_n^2 och c_n^2.

Ekv. (ς) kunna för givna x_1, y_1, z_1 alltid lösas med avseende på x_0, y_0, z_0 (systemets determinent befinnes vara -2). Vi kunna därför utgå från $A_nB_nC_n$ och successivt beräkna A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, ... $A_0B_0C_0$. Man har endast att placera varje A_r mitt emellan de närmast förut bestämda A_{r+1} och A_{r+2} och analogt för B_r, C_r. Intet hindrar att denna process fortsättes förbi A_0. Vi erhålla A_{-1} mitt emellan A_0 och A_1, A_{-2} mitt emellan A_{-1} och A_0, ..., A_{-r} mitt emellan A_{-r+1} och A_{-r+2} o. s. v. i oändlighet. Formlerna (7), (8), (9), (10), gälla oförändrade, då n ersättes med -1, -2, -3 o. s. v., om man frånser tecknet för T_n, i (9). En viktig omständighet måste emellertid beaktas. Medan för $n \geqq 0$ $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ alltid framgår ur $A_nB_nC_n$ genom de *utåt* liggande liksidiga trianglarna $B_nC_nA_{n+1}$, ..., ligga för tillräckligt stora n trianglarna $B_{-n}C_{-n}A_{-n+1}$, ... *inåt* i förhållande $A_{-n}B_{-n}C_{-n}$. Detta är lätt att inse. $l_{-1} = \frac{l_0}{2}$, $l'_{-1} = l'_0$; $l_{-2} = \frac{l_0}{2^2}$, $l'_{-2} = l'_0$; $l_{-n} = \frac{l_0}{2^n}$, $l'_{-n} = l'_0$. Det måste alltså för tillräckligt stora $n (\geqq N)$ inträffa att $l_{-n} < l'_{-n}$, men detta betyder att omloppsriktningen $A_{-n} \rightarrow B_{-n} \rightarrow C_{-n}$ för sådana n är negativ, om $A_0 \rightarrow B_0 \rightarrow C_0$ är positiv.[1] I kedjans tidigare del ligga alltså de liksidiga trianglarna inåt; i den senare delen så snart omloppsriktningen $A_{-n} \rightarrow B_{-n} \rightarrow C_{-n}$ kastat om, ligga de utåt. Skulle undantagsvis $l_0 = 2^r l'_0$, ligga A_{-r}, B_{-r}, C_{-r} i rät linje, emedan $l_{-r} = l'_{-r}$ och $T_{-r} = 0$ enl. (9). Då är omloppsriktningen obestämd. Här kan påpekas, att T_n enl. (9) erhålles med negativt tecken för neg. $A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n$, vilket ju är den vanliga egenskapen hos analytiska uttryck för en triangel-

[1] För sådana trianglar motsvarar alltså l_n egentligen l'_0 och l'_n motsvarar l_0, med andra ord l_n och l'_n byta roll.

yta. Av särskilt intresse är att undersöka gränstriangeln $\underset{-\infty}{A}\ \underset{-\infty}{B}\ \underset{-\infty}{C}$, vilken vi korteligen beteckna ABC.

14. Triangeln ABC är liksidig. Enl. (10′) är nämligen

$$\underset{-\infty}{a^2} = \frac{l_0'^2}{3},\quad \underset{-\infty}{a} = -\frac{l_0'}{\sqrt{3}}$$

och samma värden erhållas för $\underset{-\infty}{b}$, $\underset{-\infty}{c}$.

Enl. (7) är, som det bör vara, $\underset{-\infty}{l} = 0$ och $\underset{-\infty}{l'} = l_0' = \underset{-\infty}{a} \cdot \sqrt{3}$ (alltså dubbla höjden i ABC).

15. A, B, C utskäras på A_0P, B_0P, C_0P av den cirkel, som har sitt centrum i T och går genom P. ABC har nämligen (som alla $A_nB_nC_n$) sin tyngdpunkt i T och den omskrivna cirkelns radie är $\frac{\underset{-\infty}{a}}{\sqrt{3}} = \frac{l_0'}{3} = TP$ enl. sats 9. Den kring ABC omskrivna cirkeln, som har sitt centrum i T, emedan ABC är liksidig, går alltså genom P. Utom i P skär denna cirkel A_0P, B_0P, C_0P i A, B, C resp. Man inser lätt, att t. ex. A ej kan falla i P med mindre $PT \perp A_0P$, men då tangerar den omskrivna cirkeln A_0P och A kan sägas vara cirkelns *andra* skärningspunkt med A_0P (utom P) även i detta fall. För övrigt följer denna sats även därav att PA, PB, PC äro parallella med sidorna i en liksidig triangel. Detta är nämligen möjligt endast på två sätt, då ABC är liksidig. Antingen sammanfaller P med T eller också ligger P på den omskrivna cirkeln. Det förra är möjligt endast om $A_0B_0C_0$ är liksidig och $l_0' = 0$.

16. $A_0A = B_0B = C_0C = \frac{l_0}{3}$. Följer omedelbart ur sats 10 för $n = -\infty$.

Allmännare är $A_nA = B_nB = C_nC = \frac{l_n}{3}$, emedan vilken triangel som helst i vår kedja kan betraktas som $A_0B_0C_0$.

Det grundläggande i våra föregående betraktelser har varit transformationen (ς). I själva verket kan man tänka sig hela vår triangelkedja konstruerad sålunda:

Man utgår från en godtycklig länk $A_rB_rC_r$ och utför transf. (ς), (ς^2), ..., varvid A_{r+1}, B_{r+1}, C_{r+1}, ... erhållas, samt (ς^{-1}), (ς^{-2}), ..., varvid $A_{r-1}B_{r-1}C_{r-1}$, ... erhållas. Man erhåller en ny kedja genom att använda transf. (ς') i stället för (ς). Fördenskull har man blott att utbyta ε mot ε^2, ε^2 mot ε, l_0 mot l_0' och l_0' mot l_0 i det föregående. Om vi utgå från $A_0B_0C_0$ blir $A_1'B_1'C_1'$ närmast följande länk. A_0A_1', B_0B_1', C_0C_1' råkas i P', som redan visats i sats 5. På dessa linjer ligga sedan de övriga hörnen enligt samma lag som gäller för A_n, B_n, C_n på A_0P, B_0P, C_0P. Limestriangeln är liksidig med sidolängden $\frac{l_0}{\sqrt{3}}$ och dess hörn utskäras av den cirkel, som har centrum T och radien TP'. Emedan $l_0' < l_0$, är $\frac{l_0'}{2^n} < l_0$ och de liksidiga trianglarna ligga inåt i kedjans negativa del.[1] I den positiva delen äro de utåtriktade så snart $2^n l_0' > l_0$. Det bör observeras att de symmetripunkter A_n', B_n', C_n' $(n \neq 1)$ vi använt i det föregående ej äro att förväxla med hörnen i den nya kedjan, som ligga på andra linjer. Även i den senare kedjan finnas tre system symmetripunkter, belägna på tre med A_0P', B_0P', C_0P' parallella linjer, som råkas i den med Q analoga punkten Q'.

Punkterna P och P' äro de enda punkter, från vilka varje sida i $A_0B_0C_0$ synes under vinklarna $\frac{\pi}{3}$ eller $\frac{2\pi}{3}$. Är den största vinkeln i triangeln $< \frac{2\pi}{3}$, ligger P inom triangeln och de tre synvinklarna äro $\frac{2\pi}{3}$. P är då den punkt, för vilken $PA_0 + PB_0 + PC_0$ har minsta möjliga värde. P' ligger utanför triangeln; två av synvinklarna äro $\frac{\pi}{3}$, den tredje $\frac{2\pi}{3}$. Detsamma gäller om P, då triangeln har en trubbig vinkel $> \frac{2\pi}{3}$. Är t. ex. $\gamma = \frac{2\pi}{3}$, faller P i C_0.

[1] D. v. s. den del, som motsvarar $A_{-1}B_{-1}C_{-1}$..., i den förra kedjan.

Åtskilligt kunde tilläggas om vår konfiguration, men det anförda må vara nog som exempel på de fördelar man kan hava av en lämplig kombination mellan de elementära planimetriska metoderna och den geometriska tolkningen av de komplexa talen. Andra exempel av denna art äro följande uppsatser i denna tidskrift: David A. Larsson, En geometrisk sats, löst med komplexa tal, årg. 2, sid. 18, X, En konstruktion av rötterna till den allmänna ekv. av andra graden, årg. 4, sid. 155.

Några tillämpningar av sannolikhetskalkylen på tennisspelet.

Av B. BERGGREN.

Ett klassiskt sannolikhetsproblem lyder så: »Två spelare, A och B, spela om en insats, och det bestämmes, att den, som först vinner 4 spel, erhåller insatsen. Sedan A vunnit 3 spel och B 2, måste de avbryta vidare spel på grund av oöverstigliga hinder. Hur skall insatsen nu fördelas efter spelets resultat, om utgången av varje spel är en ren slump, oberoende av all skicklighet?»

Vid tennisspelet är problemställningen i huvudsak densamma. A och B tävla här om att först uppnå 4 bollar och därmed hemföra »gamet». Beräkningen av sannolikheten för game vid viss utgångsställning kompliceras här, dels därigenom, att spelarnas skicklighet är avgörande för varje särskild boll, dels genom föreskriften, att för vunnet game fordras ett försprång på 2 hemförda bollar. Sålunda räknas 4 mot 3 bollar blott för »fördel», likaså 5 mot 4 o. s. v.; 5 mot 3, 6 mot 4 ger vinst; 4 mot 4, 5 mot 5 kallas »lika».

Som mått på den spelandes skicklighet taga vi i det följande den sannolikhet han har att vinna varje särskild boll och benämna denna sannolikhet hans koefficient. Vi sätta A:s koeff.$=k$, B:s koeff.$=l$. Då är

$$k+l=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Dessa koefficienter äro alltså relativa och gälla blott, när A spelar mot B, ej om t. ex. A och C spela.

Beteckna vi vidare sannolikheten för att A skall vinna gamet, om spelet redan står m mot n bollar för A med $S_{m,n}$, (»A:s chanser»), är det tydligt, att nästa boll antingen

ger $m+1$ mot n bollar för A och därmed förändrar hans chanser till $S_{m+1,\,n}$ eller ger m mot $n+1$ bollar och chanserna $S_{m,\,n+1}$ för A. Då sannolikheten för, att det förra skall bli fallet, är k och för att det senare skall inträffa, är l, inses omedelbart, att A:s totala chanser fås ur ekv.

$$S_{m,\,n} = k\,S_{m+1,\,n} + l\,S_{m,\,n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Betrakta vi nämligen ett mycket stort antal, N, games, alla med samma utgångsställning, m mot n bollar, kommer i medeltal nästa boll att tillfalla A i $N \cdot k$ games, däremot B i $N \cdot l$ games. Då i förra fallet A:s chanser efter vunnen boll blir $S_{m+1,\,n}$, vinner A av dessa $N \cdot k$ games $N \cdot k \cdot S_{m+1,\,n}$ stycken. I senare fallet blir A:s chanser $S_{m,\,n+1}$ och av dessa $N \cdot l$ games vinner alltså A $N \cdot l \cdot S_{m,\,n+1}$ stycken. Inalles vinner alltså A från utgångsställningen m mot n $N(k\,S_{m+1,\,n} + l\,S_{m,\,n+1})$ stycken games av hela antalet N.

Formel (2) gäller tydligtvis för alla heltalsvärden m, n. Egentligen borde vi utesluta sådana kombinationer som t. ex. $m=7$, $n=3$, ty spelet är redan avgjort för A med 5 mot 3. Men man inser lätt, att man även nu äger rätt att tillämpa (2), om man blott sätter $S_{8,\,3} = S_{7,\,4} = 1$. Vi få $S_{7,\,3} = k + l = 1$, som det bör vara. Vi sätta alltså

$S_{m,\,n} = 1$ för $m \geq 4$, om samtidigt $m \geq n+2$
$S_{m,\,n} = 0$ » $n \geq 4$, » » $n \geq m+2$.

Vidare är

$S_{m,\,m} = S_{2,\,2}$ för $m \geq 2$
$S_{m+1,\,m} = S_{3,\,2}$ » »
$S_{m,\,m+1} = S_{2,\,3}$ » »

Detta framgår av spelets regler. Då vardera redan erhållit minst 2 bollar, vinnes gamet av den, som först uppnår ett försprång på 2 bollar. Med mindre än 4 hemtagna bollar kan detta ju ej längre ske. Utsikterna för vinst bero nu blott på försprånget, ej på totala antalet hemtagna bollar.

Vi ha hittills uteslutit den möjligheten, att någon boll kan bli oavgjord, detta i full överensstämmelse med spelreglerna. Det kan dock här vara av intresse att undersöka,

vad inverkan det skulle ha, om en dylik möjlighet medgåves. Betecknas sannolikheten för denna möjlighet med p, få vi i stället för (1)

$$k+l+p=1.$$

Vidare övergår (2) till

$$S_{m,\,n}=k\,S_{m+1,\,n}+l\,S_{m,\,n+1}+p\,S_{m,\,n}$$

eller

$$S_{m,\,n}=\frac{k}{1-p}\,S_{m+1,\,n}+\frac{l}{1-p}\,S_{m,\,n+1},$$

vilket kan skrivas

$$S_{m,\,n}=k_1\,S_{m+1,\,n}+l_1\,S_{m,\,n+1}, \quad \ldots \quad (2\,a)$$

där $k_1=\frac{k}{1-p}=\frac{k}{k+l}$ och $l_1=\frac{l}{1-p}=\frac{l}{k+l}$

samt

$$k_1+l_1=1 \quad \ldots \quad (1\,a).$$

Här ange k_1 och l_1 tydligen utsikterna för A resp. B att hemföra en viss boll, om oavgjorda bollar helt enkelt lämnas utan avseende. Och att formel (2) skall gälla för dessa korrigerade k- och l-värden, var blott att vänta.

Vi vilja nu betrakta följande viktiga specialfall.

I. Spelet står »lika» ($m=n$; $m\geq 2$):

$$\begin{aligned} S_{m,\,m} &= k\,S_{m+1,\,m} + l\,S_{m,\,m+1} \\ S_{m+1,\,m} &= k\,S_{m+2,\,m} + l\,S_{m+1,\,m+1} \\ S_{m,\,m+1} &= k\,S_{m+1,\,m+1} + l\,S_{m,\,m+2}\ , \end{aligned}$$

varav genom insättning

$$S_{m,\,m}=k^2\,S_{m+2,\,m}+2kl\,S_{m+1,\,m+1}+l^2\,S_{m,\,m+2}.$$

Här är enligt föregående

$$S_{m+1,\,m+1}=S_{m,\,m};\ S_{m+2,\,m}=1;\ S_{m,\,m+2}=0.$$

Vi få alltså

$$S_{m,\,m}=k^2+2kl\,S_{m,\,m},$$

varav

$$S_{m,\,m}=\frac{k^2}{1-2kl}=\frac{k^2}{1-2k+2k^2} \quad (m\geq 2) \ \ldots \ (3).$$

II. A har »fördel» ($m+1$ mot m; $m \geq 2$):

$$S_{m+1,\,m} = k S_{m+2,\,m} + l S_{m+1,\,m+1}$$
$$= k + l S_{m,\,m}.$$

Vi få efter insättning av värdet å $S_{m,\,m}$

$$S_{m+1,\,m} = k \frac{1-kl}{1-2kl} = k \frac{1-k+k^2}{1-2k+2k^2} \quad . \quad . \quad (4).$$

III. B har fördel (A har m mot $m+1$; $m \geq 2$):

$$S_{m,\,m+1} = k S_{m+1,\,m+1} + l S_{m,\,m+2}$$
$$= k S_{m,\,m}$$

alltså

$$S_{m,\,m+1} = \frac{k^3}{1-2kl} = \frac{k^3}{1-2k+2k^2} \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Denna formel sammanhänger direkt med den föregående När B har fördel bli nämligen enl. (4) hans chanser

$$l \cdot \frac{1-kl}{1-2kl}$$

och alltså A:s chanser

$$S_{m,\,m+1} = 1 - \frac{l(1-kl)}{1-2kl} =$$
$$= \frac{1-l+kl^2-2kl}{1-2kl}$$
$$= \frac{k+kl^2-2kl}{1-2kl}$$
$$= \frac{k(1-l)^2}{1-2kl}$$
$$= \frac{k^3}{1-2kl}.$$

IV. Gamet börjar (0 mot 0)

$$S_{0,\,0} = k S_{1,\,0} + l S_{0,\,1}$$
$$S_{1,\,0} = k S_{2,\,0} + l S_{1,\,1}$$
$$S_{0,\,1} = k S_{1,\,1} + l S_{0,\,2}$$

varav

$$S_{0,\,0} = k^2 S_{2,\,0} + 2kl S_{1,\,1} + l^2 S_{0,\,2}.$$

Fortsätter man på samma sätt fås

$$S_{0,0}=k^3S_{3,0}+3k^2lS_{2,1}+3kl^2S_{1,2}+l^3S_{0,3} \text{ o. s. v.}$$

Likheten med binomialutvecklingen är tydlig, och vi kunna symboliskt sätta

$$\left.\begin{aligned} S_{0,0}&=(k+l)^2\frown S_{2,0}\\ &=(k+l)^3\frown S_{3,0}\\ &=(k+l)^n\frown S_{n,0}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6).$$

Speciellt får man för $n=5$

$$S_{0,0}=k^5S_{5,0}+5k^4lS_{4,1}+10k^3l^2S_{3,2}+10k^2l^3S_{2,3}+ +5kl^4S_{1,4}+l^5S_{0,5},$$

vilket ger

$$\begin{aligned} S_{0,0}&=k^5+5k^4l+10k^3l^2S_{3,2}+10k^2l^3S_{2,3}\\ &=k^5+5k^4l+10k^2l^2(kS_{3,2}+lS_{2,3})\\ &=k^5+5k^4l+10k^2l^2S_{2,2} \quad \ldots\ldots\ldots (7).\end{aligned}$$

Införa vi värdet å $S_{2,2}$ ur (3) erhålla vi

$$S_{0,0}=k^4\left(k+5l+\frac{10l^2}{1-2kl}\right).$$

Beakta vi här, att

$$k^2+l^2+2kl=1$$

och alltså

$$\frac{k^2+l^2}{1-2kl}=1,$$

$$\frac{l^2}{1-2kl}=1-\frac{k^2}{1-2kl},$$

få vi till sist

$$S_{0,0}=k^4\left(15-4k-\frac{10k^2}{1-2k+2k^2}\right) \quad \ldots (8).$$

Övriga $S_{m,n}$ kunna fås på motsvarande sätt.

I tabell 1 finna vi dessas värden uträknade i promille för $k=0{,}05$ till $k=0{,}5$. Tabellen ger alltså den svagare spelarens chanser.

Diagrammen figg. 1—2 kunna nu med fördel användas för att bestämma den handicap, som bör lämnas åt den

svagare spelaren. Denna handicap bör beräknas så, att båda spelarna få samma chanser, alltså 500 promille. Så visar diagrammet över $S_{1,0}$ (fig. 2) att en förgåva av 1 boll är lämplig för en spelare A, vars koefficient är 0,43. På samma sätt ger en förgåva av 2 bollar rätt åt en annan, vars koefficient är 0,34 ($S_{2,0}$ fig. 2) o. s. v.

En vanligen förekommande form av handicap är den negativa. Den starkare spelaren står då vid gamets början på -1, -2 o. s. v. Även förekommer blandad handicap, så t. ex. om den svagare börjar på $+1$, den starkare på -1. Chanserna i dylika spel kunna vi beräkna med samma metoder som förut.

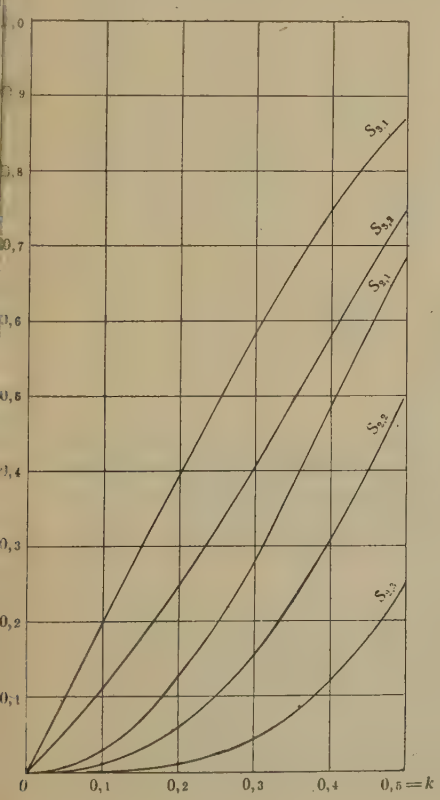


Fig. 1.

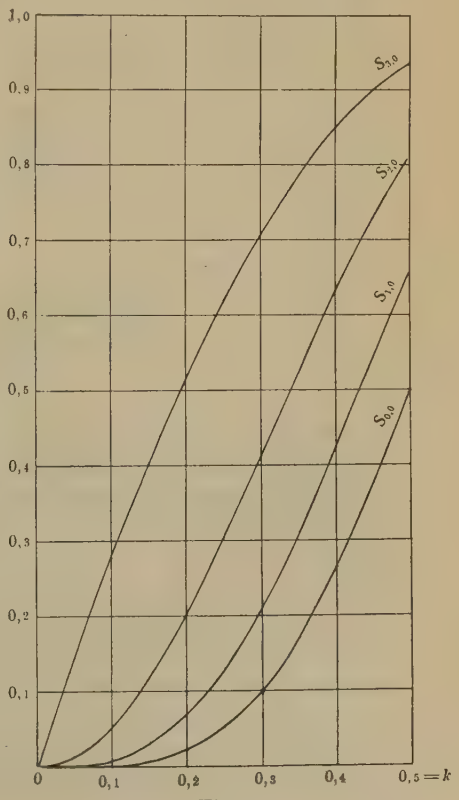


Fig. 2.

Tabell 1.

k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
S_{32}	53	111	176	247	325	408	497	584	670	750
S_{23}	0,1	1	5	12	25	47	74	123	180	250
S_{22}	3	12	30	59	100	155	225	308	401	500
S_{31}	100	200	300	397	493	587	673	750	818	875
S_{13}	0,0	0,1	0,7	2	6	14	26	49	81	125
S_{21}	8	31	70	127	198	284	382	485	588	688
S_{12}	0,1	1	5	14	30	56	96	153	226	313
S_{30}	145	278	405	518	620	710	787	850	901	938
S_{03}	0,0	0,0	0,1	0,5	2	4	9	20	37	63
S_{11}	0,5	4	15	37	72	125	196	285	389	500
S_{20}	14	56	120	205	304	412	523	632	729	813
S_{02}	0,6	0,1	0,9	3	9	20	38	73	122	188
S_{10}	1	9	33	70	130	211	311	424	542	656
S_{01}	0,0	0,6	3	10	24	51	94	158	242	344
S_{00}	0,1	1	7	22	51	99	170	265	377	500
$S_{3,-1}$	187	350	495	614	715	797	861	910	946	970
$S_{2,-1}$	23	85	181	287	407	528	641	743	826	891
$S_{1,-1}$	2	17	55	114	199	306	426	552	670	774
$S_{0,-1}$	0,2	3	15	40	88	161	260	380	508	638
$S_{3,-2}$	228	415	570	691	786	858	909	946	970	984
$S_{2,-2}$	33	118	239	368	502	627	734	824	891	938
$S_{1,-2}$	4	27	83	165	275	402	534	661	769	856
$S_{0,-2}$	0,4	5	25	65	135	233	356	492	625	746

Vi få sålunda

$$\begin{aligned} S_{0,-1} &= k S_{1,-1} + l S_{0,0} \\ &= (k+l)^2 \frown S_{2,-1} \\ &= (k+l)^3 \frown S_{3,-1} \quad \text{o. s. v.} \end{aligned}$$

Tabell 1 upptager jämväl några sålunda beräknade S-värden. I figg. 3—4 meddelas de motsvarande diagrammen. Tabell 2 slutligen utgör en sammanställning av de mot given handicap svarande koefficienterna för den svagare parten.

Tabell 2.

0,5 =	$S_{3,2}$	$S_{3,1}$	$S_{2,1}$	$S_{3,0}$	$S_{2,0}$	$S_{1,0}$	$S_{3,-1}$
k =	0,352	0,254	0,407	0,193	0,340	0,432	0,152
0,5 =	$S_{2,-1}$	$S_{1,-1}$	$S_{0,-1}$	$S_{3,-2}$	$S_{2,-2}$	$S_{1,-2}$	$S_{0,-2}$
k =	0,288	0,379	0,447	0,127	0,250	0,337	0,403

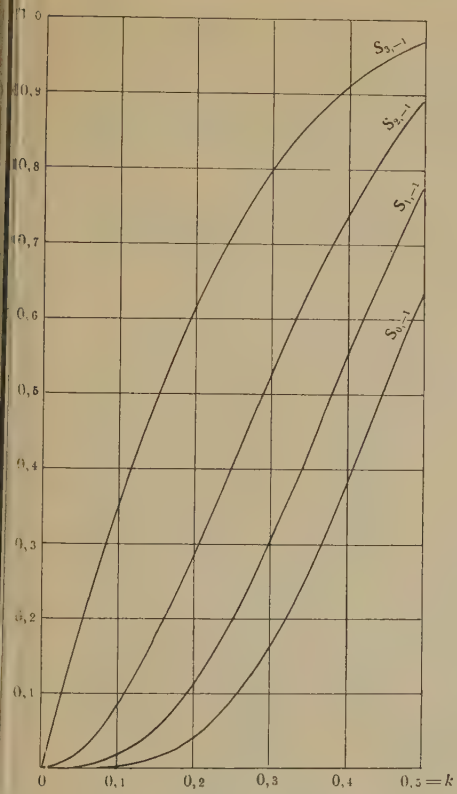


Fig. 3.

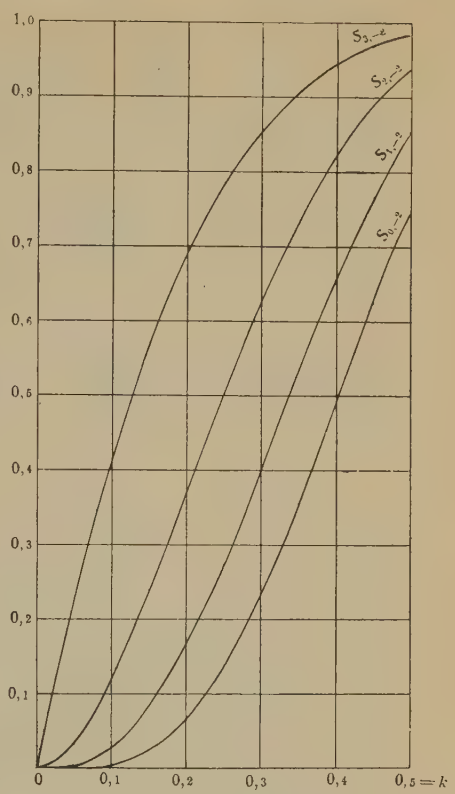


Fig. 4.

För $k=0{,}25$ är alltså en handicap av $(+2, -2)$ lämplig. A bör vid spelets början stå på $+2$, B på -2 bollar ($+30$ resp. -30 points enligt övlig beteckning). För $k=0{,}3$ ha vi att välja mellan $(+2, -1)$ och $(+1, -2)$. I förra fallet blir A:s utsikter 528, i senare fallet 402 promille.

Hittills ha vi blott tagit ett enkelt game i betraktande. Ett parti (»set») vinnes av den, som först uppnått 6 games. Härvid fordras oftast, att vinnaren skall vara minst 2 games före motparten. Är handicapen rätt avpassad för gamet, bli naturligtvis därigenom även chanserna för set lika. Emellertid måste man i allmänhet räkna med olika k-värden

för de olika games alltefter A eller B har »serven» (ger upp bollen). Serven tillkommer omväxlande A och B och stannar hos vederbörande hela gamet igenom. Vinner t. ex. A 45 % av alla sina »servebollar» men blott 35 % av B:s, bör A i sina »servegames» ha en handicap på (0, —1) i B:s »servegames» däremot en dylik på (2, 0).

Till sist vilja vi visa hur man med grundformeln (2) lätt löser det problem, som inleder dessa rader. Vi få omedelbart

$$S_{3,2}=kS_{4,2}+lS_{3,3}.$$

Här är $k=l=1/2$; $S_{4,2}=1$; $S_{3,3}=1/2$; varav $S_{3,2}=3/4$. A bör ha $3/4$ av insatsen.

Om det exakta antalet primtal under ett visst tal.

Av GUSTAF LINDBORG.

§ 1.

Några inledande ord.

För att bestämma det *exakta* antalet primtal under ett visst tal n, har man för bekvämlighetens skull reducerat eller begränsat området för undersökningen på sätt, som vi skola återge här nedan i *Sats 2 och* 3.

Avsikten med föreliggande uppsats är nu *dels* att lämna ett nytt och överskådligare bevis för den i nämnda *Sats 3* uttryckta s. k. *Meisselska metoden, dels* att driva förbättringen av metoden *ett steg längre* (se Sats 4 nedan) än, såvitt det är oss bekant, hittills skett; på samma gång som vår metod *eo ipso* innebär ett resonemang, som kan tänkas ytterligare förenkla (eller i varje fall ytterligare generalisera) metoden i fråga, därest så skulle anses önskvärt.

För att emellertid vår framställning må bli fullt tillgänglig även för den, som ej alls studerat talteori, skola vi börja med några *talteoretiska definitioner* samt i förbigående söka lämna ett enklare och lättfattligare bevis för *Sats 1* än det vanliga.

(Med ett *tal* mena vi i det kommande alltid ett *helt positivt* tal eller *noll,* därest ej annorlunda säges ifrån.)

§ 2.

Några talteoretiska definitioner.

Def. 1. *Talet 1 må i det följande anses som ett sammansatt tal, på grund varav talet 2 blir det minsta absoluta primtalet. Talet 1 må vidare anses som relativt primtal till alla*

tal, även till sig självt. Relativa primtal äro eljest sådana tal, som sinsemellan sakna annan faktor än talet 1.

De absoluta primtalen (som vi även för korthets skull kalla primtal) *förse vi med indices, angivande primtalens inbördes ordning i den naturliga talserien.*

Ex. 1. Talen 12 och 35 äro sinsemellan relativa primtal. Likaså de tvenne talen 1 och 12 samt även 12 och 13, däremot icke talen 12 och 15.

Ex. 2. Man har $p_1=2$; $p_2=3$; $p=17$; $p_{25}=97$, o. s. v.

Def. 2. *Med* $E\left(\frac{n}{a}\right)$ *menas det största hela tal, som ingår i bråket* $\frac{n}{a}$.

Ex. $E(\frac{15}{4})=3$; $E(\frac{4}{15})=0$; $E(\frac{35}{5})=7$.

Def. 3. *Med* $\varphi(n, k)$, *där* n *och* k *äro hela positiva tal, menas antalet av de tal uti den av* n *tal bestående naturliga talserien*

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, n \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

vilka äro relativa primtal till de k *första primtalen.*

Ex. 1. $\varphi(25, 3)=7$, ty talen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 (7 st.) äro ju relativa primtal till alla tal fr. o. m. 1 t. o. m. 25.

Ex. 2. $\varphi(2n+1, 1)=n+1$; $\varphi(2n, 1)=n$; $\varphi(p_i, i)=1$, nämligen talet 1 självt.

Def. 3 a. (Kompletteringsdef.) *Med* $\varphi(n, 0)$ *menas* n.

Def. 4. *Med* $\psi(n)$, *där* n *är ett godtyckligt pos. tal, menas antalet primtal, vilka äro* $\leqq n$, *d. v. s. antalet primtal i intervallet 1 till och med* n.

Ex. $\psi(20)=8$; $\psi(\sqrt{20})=\psi(4,47\ldots)=2$; $\psi(p_r)=r$.

Till de nu anförda gängse definitionerna foga vi följande nya definition, avsedd för vår egen kommande specialundersökning.

Def. 5. *Med* $P(N)$, *där* N *är ett godtyckligt positivt tal, mena vi det största primtal, som är* $\leqq N$.

Ex. 1. $P(\frac{85}{5})=17$; $P[\frac{83}{5}]=13$; $P\left(\frac{200}{p_4}\right)=p_9$.

Ex. 2. $\psi[P(\frac{83}{5})]=\psi(13)=6$.

Anm. För $k \geqq \psi(n)$ fås naturligtvis *alltid* $\varphi(n, k)=1$.

§ 3.

Några talteoretiska satser.

Sats 1. *Med ovan införda beteckningar gäller rekursionsformeln:*

$$\varphi(n, i) = \varphi(n, i-1) - \varphi\left[E\left(\frac{n}{p_i}\right), i-1\right] \quad . \quad . \quad (2),$$

Bevis: Utgå från serien (1) av de n första naturliga talen

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n-1, n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Alla tal i denna serie som, till ett antal av $\varphi(n, i)$ stycken, äro relativa primtal till de i första primtalen, äro uppenbarligen *a fortiori* också relativa primtal till de $i-1$ första primtalen. *Men utom dessa* $\varphi(n, i)$ *tal* finns det också (i allmänhet) uti serien (1) en hel del andra tal, som också äro relativa primtal till de $i-1$ första primtalen, nämligen alla tal, som äro delbara med primtalet p_i utan att vara delbara med något av de $i-1$ första primtalen.

Delbara med p_i äro nu emellertid *endast* talen

$$1 \cdot p_i, \; 2 \cdot p_i, \; 3 \cdot p_i, \; \ldots\ldots, \; E\left(\frac{n}{p_i}\right) \cdot p_i,$$

såsom lätt inses. Men bland dessa tal finns det uppenbarligen $\varphi\left[E\left(\frac{n}{p_i}\right), i-1\right]$ stycken tal, som äro relativa primtal till de $i-1$ första primtalen. Alltså fås:

$$\varphi(n, i-1) = \varphi(n, i) + \varphi\left[E\left(\frac{n}{p_i}\right), i-1\right],$$

d. v. s. formeln (2). *V. S. B.*

Ex. 1. $\varphi(2\,000, 3) = \varphi(2\,000, 2) - \varphi\left[E\left(\frac{2\,000}{p_3}\right), 2\right] =$

$$= \varphi(2\,000, 2) - \varphi(400, 2) =$$

$$= \varphi(2\,000, 1) - \varphi(666, 1) - \varphi(400, 1) + \varphi(133, 1) =$$

$= 1\,000 - 333 - 200 + 67 = 534$. Alltså $\varphi(2\,000, 3) = 534$.

Det finns sålunda 534 stycken tal fr. o. m. 1 t. o. m. 2 000 (d. v. s. inom gebitet 1 till 2 000), som varken äro delbara med 2, 3 eller 5.

Ex. 2. $\varphi(1\,000, 11) = 158$, såsom fås efter ganska långa räkningar.

Anm. Det inses lätt, att om (både n och) k äro stora tal, uträkningen av $\varphi(n, k)$ kan bli rätt besvärlig. Vi återkomma härtill: se »praktisk regel» nedan.

Sats 2. *Om* $(p_k)^2 \leqq n < (p_{k+1})^2$, *d. v. s. om* $k = \psi(\sqrt{n})$, *så är*

$$\psi(n) = \varphi(n, k) + k - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Bevis: De tal uti serien (1)

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, n-1, n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

som utgöra *samtliga relativa primtal till de k första primtalen*, äro, såsom vi till att börja med skola bevisa, följande tal (där eventuellt $P(n)$ just är talet n), nämligen:

$$1, p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots\ldots, P(n) \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Först och främst äro (utom 1) talen i (4) de enda *icke-sammansatta tal* (*absoluta* primtal) $\leqq n$, vilka (jämte 1) äro relativa primtal till de k första primtalen. *Mellan* 1 *och* p_{k+1} kan vidare något *sammansatt* relativt primtal till de k första primtalen ej finnas, alldenstund alla tal mellan 1 och p_{k+1} äro uppbyggda medelst just de k första (minsta) absoluta primtalen. *Mellan* p_{k+1} *och* p_{k+2} kan ej heller något sådant relativt primtal finnas, ty det *minsta sammansatta* relativa primtalet, som är *större än* p_{k+1}, har faktiskt formen $(p_{k+1})^2$, vilket tal ju enligt antagandet faller utanför serien (4), d. v. s. är $> n$. Än mindre kan något *sammansatt* relativt primtal (till de k första absoluta primtalen) falla i något annat intervall i (4) eller mellan $P(n)$ och n.

Serien (4) utgör alltså *alla* relativa primtal $\leqq n$ till de k första primtalen, d. v. s. antalet tal i (4) är $\varphi(n, k)$ stycken.

Men tydligen innehåller (4) $\psi(n) - k + 1$ stycken tal. Alltså fås

$$\varphi(n, k) = \psi(n) - k + 1, \text{ d. v. s. } (3).$$

V. S. B.

Ex. 1. Bestäm antalet absoluta primtal under 50.

Man får $k=\psi(\sqrt{50})=\psi(7)=4$. Alltså enl. (3):

$$\psi(50)=\varphi(50, 4)+4-1=12-1+4 \text{ (jfr Sats 1).}$$

Anm. Detta ex. 1 är naturligtvis endast ett mycket enkelt kontrollexempel.

Ex. 2. $\psi(1\,000)=\varphi(1\,000, 11)+11-1=158+11-1=168.$

*

Fördelen med *Sats 2* är den, att man kan *utbyta* (reducera) undersökningsområdet av primtalen mellan 1 och n *mot* undersökningsområdet 1 till $\sqrt{n}$, vilket ju innebär en betydlig lättnad. Emellertid kunna räkningarna i alla fall *på grund av* $\varphi(n, k)$ bli ganska besvärliga, såsom redan ex. 2 torde ge vid handen. *Vi vilja därför uppställa och bevisa följande praktiska regel*, varigenom uträkningarna av $\varphi(n, k)$ — åtminstone våga vi påstå, att detta gäller en del av dem — ofta kunna betydligt förenklas.

Praktisk regel. *Om* $(p_k)^2 \leqq n < (p_{k+1})^2$, *d. v. s. om* $k=\psi(\sqrt{n})$, *så är*

$$\varphi(n, a)=\psi(n)-a+1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

för varje $a \geqq k$. [*För* $a \geqq \psi(n)$ *fås* (se pag. 2) *alltid* $\varphi(n, a)=1$.]

Bevis: Formeln (5) gäller till att börja med tydligen för $a=k$, ty i så fall är (5) helt enkelt just (3), vilken formel nyss bevisats.

Antag däremot att $a=k+r$, där r är pos. helt tal. De samtliga relativa primtalen $\leqq n$ till de a första primtalen äro tydligen:

$$1, p_{k+r+1}, p_{k+r+2}, \ldots\ldots, P(n) \quad . \quad . \quad (4a),$$

vilket lätt torde inses genom ett resonemang analogt med beviset för formeln (3). Men antalet tal i (4a) är tydligen

$$\psi(n)-(k+r)+1.$$

Alltså fås

$$\varphi(n, a)=\psi(n)-(k+r)+1=\psi(n)-a+1.$$

V. S. B.

Ex. 1. Bestäm $\varphi(76, 5)$.

Man har $k=\psi(\sqrt{76})=\psi(8)=4$, som <5. Alltså gäller formeln (5) för $\varphi(76, 5)$, på grund varav omedelbart fås:

$$\varphi(76, 5)=\psi(76)-5+1=21+1-5=17.$$

Ex. 2. Bestäm $\varphi(76, 32)$.

Man får $\varphi(76, 32)=\psi(76)-32+1=21-32+1<0 \therefore \varphi=1$.

Ex. 3. $\varphi(76, 12)=\psi(76)-12+1=21-12+1=10$.

Anm. 1. Naturligtvis förutsätter (5) kännedomen om $\psi(n)$, men i så fall förenklas ju räkningarna betydligt.

Anm. 2. Uti sin »Anfangsgründe zur Zahlenlehre», 1902, har *G. Wertheim*, pag. 58, infört uträkningarna på $\varphi(1\,000,11)$ för att finna $\psi(1\,000)$. Man har ju enligt (3):

$$\psi(1\,000)=\varphi(1\,000, 11)+11-1,$$

alldenstund $k=\psi(\sqrt{1\,000})=\psi(31)=11$.

En hel del av dessa uträkningar förenklas nu betydligt med användande av vår ovan härledda *praktiska regel*. Så t. ex. fås enl. (5):

$$\varphi(32, 10)=\psi(32)-10+1=11-10+1=2,$$
$$\text{ty } k=\psi(\sqrt{32})=\psi(5)=3<10;$$

$$\varphi(34,\ 9)=\psi(34)-\ 9+1=11-\ 9+1=3,$$
$$\text{ty } 9>\psi(\sqrt{34});$$

$$\varphi(43,\ 8)=\psi(43)-\ 8+1=14-\ 8+1=7,$$
$$\text{ty } 8>\psi(\sqrt{43});\ \text{o. s. v.}$$

$$\varphi(90,\ 4)=\psi(90)-\ 4+1=24-\ 4+1=21,$$
$$\text{ty } 4=\psi(\sqrt{90});$$

men för $\varphi(142, 3)$ får *icke* (5) användas, emedan

$$3<\psi(\sqrt{142})=\psi(11)=5.$$

Man har $\varphi(142, 3)=38$, medan ett oberättigat användande av (5) skulle ge det *felaktiga* svaret

$$\varphi(142, 3)=\psi(142)-3+1=32.$$

*

Vi gå nu att framställa en ny härledning av *Meissels formel*, d. v. s. av *Sats 3.*

Sats 3. *Under följande förutsättningar:*

$$(p_k)^3 \leqq n < (p_{k+1})^3, \text{ d. v. s. } k = \psi(\sqrt[3]{n}),$$

$$(p_l)^2 \leqq n < (p_{l+1})^2, \text{ d. v. s. } l = \psi(\sqrt{n}),$$

samt $d = l - k$; *gäller formeln:*

$$\psi(n) = \varphi(n, k) - 1 + k(d+1) + \frac{d(d-1)}{2} - \sum_{r=1}^{d} \psi\left(\frac{n}{p_{k+r}}\right) \ldots (6).$$

Bevis: *Alla* de tal i serien (1)

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

som äro *relativa primtal* till de k första primtalen, kunna tydligen indelas i två olika grupper, nämligen:

Grupp 1. (Linjär.)

$$1, p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots\ldots, P(n).$$

Grupp 2. (Kvadratisk.)

(Består av *termerna* i nedanstående produkter, om de utföras.)

$$p_{k+1}\left[p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{p_{k+1}}\right)\right];$$

$$p_{k+2}\left[p_{k+2} + p_{k+3} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{p_{k+2}}\right)\right];$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_{k+d}\left[p_{k+d} + p_{k+d+1} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{p_{k+d}}\right)\right].$$

Beträffande nu dessa tvenne grupper inses följande:

Grupp 1 uttömmer tydligen alla *linjära* tal (d. v. s. rena *absoluta* primtal), som jämte 1 äro *relativa* primtal till de k första absoluta primtalen. Jämför beviset för formeln (3)!

Grupp 2 uttömmer alla de *kvadratiskt* sammansatta relativa primtalen, ty *nästa rad* skulle ju bli

$$p_{k+d+1}(p_{k+d+1} + p_{k+d+2} + \ldots\ldots),$$

där man redan har första termen

$$(p_{k+d+1})^2 = (p_{l+1})^2 > n$$

enligt hypotesen.

Kan någon *kubisk grupp* finnas? Nej, ty *dess första rad* skulle ju få utseendet

$$(p_{k+1})^2(p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots\ldots),$$

där man redan har första och alltså *minsta* kubiska termen $(p_{k+1})^3 > n$ enligt hypotesen.

Det behöver väl knappast påpekas, att varje *rad* i grupperna ovan är uttömmande i *sitt* slag. Och att några relativa primtal skulle finnas instuckna mellan t. ex.

$$p_{k+1} \cdot P\left(\frac{n}{p_{k+1}}\right)$$

och n av *annan* typ, än vad nedan följer i de övriga raderna, är ju uteslutet, alldenstund de relativa primtalen måste (*utanför* Grupp 1) uppbyggas med åtminstone ett par absoluta primtal fr. o. m. p_{k+1}, och *alla* sådana fall äro beaktade.

Grupperna 1 och 2 ovan äro således fullt uttömmande (men heller icke mer), då det gäller samtliga relativa primtal $\leqq n$ till de k första absoluta primtalen. Termernas sammanlagda antal i *grupperna 1 och 2* är alltså $\varphi(n, k)$.

Låt oss nu uppsöka ett annat uttryck på detta samma antal *genom att räkna termerna i grupp 1 och 2.*

Antalet termer i *Grupp 1* är tydligen

$T_1 = \psi(n) - k + 1.$

Antalet termer i *Grupp 2* är rad för rad:

$$T_2 = \psi\left(\frac{n}{p_{k+1}}\right) - k$$

$$+ \psi\left(\frac{n}{p_{k+2}}\right) - (k+1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \psi\left(\frac{n}{p_{k+d}}\right) - (k+d-1) = \sum_{r=1}^{d} \psi\left(\frac{n}{p_{k+r}}\right) - dk - \frac{d(d-1)}{2}.$$

Alltså fås, emedan $\varphi(n, k) = T_1 + T_2$, att

$$\varphi(n, k) = \psi(n) - k + 1 + \sum_{r=1}^{d} \psi\left(\frac{n}{p_{k+r}}\right) - dk - \frac{d(d-1)}{2} \quad . \quad . \quad (7),$$

som just är formeln (6), d. v. s. *Meissels* formel. (Jfr t. ex. *G. Wertheim*, op. cit., pag. 59—63, där en helt annan och betydligt längre samt mindre överskådlig form har givits bevisföringen.)

Man kan fråga: vilken fördel erbjuder formeln (6) uti *Sats 3* framför formeln (3) i *Sats 2?*

Svar: Tydligen är *index* k i (6) i allmänhet *mindre än* k i (3). Detta förenklar alltså i allmänhet beräkningen av $\varphi(n, k)$.

Uppsökandet av d i (6) är *icke* förenat med större svårigheter än uppsökandet av k i (3), ty båda bero på bestämmandet av samma funktion $\psi(\sqrt{n})$.

Formeln (6) är alltså förmånligare än (3). Medelst (6) har *Meissel* funnit resultatet $\psi(10^8) = 5\,761\,460$ (op. cit., pag. 62), vilket tal alltså anger exakta antalet absoluta primtal inom området *noll* till *hundra millioner. Wertheim* beräknar (kontrollerar) medelst formeln (6) $\psi(2\,000)$ att bli 303 (pag. 63).

§ 4.

Första generaliseringen av Meissels formel.

Medelst den bevisföringsmetod, som vi lagt till grund för härledningen av *Meissels* formel (6), är det nu möjligt att på ett ytterst elegant och lättfattligt sätt generalisera formeln (6), vilket här nedan skett i och genom *Sats 4*, vilken, så vitt vi ha oss bekant, ännu ej blivit framställd inom talteorien.

Sats 4. *Under följande förutsättningar:*

A.

$$(p_k)^4 \leqq n < (p_{k+1})^4, \text{ d. v. s. } k = \psi(\sqrt[4]{n});$$
$$(p_l)^3 \leqq n < (p_{l+1})^3, \quad » \quad l = \psi(\sqrt[3]{n});$$
$$(p_m)^2 \leqq n < (p_{m+1})^2, \quad » \quad m = \psi(\sqrt{n});$$
$$D = m - k, \text{ och } d = l - k;$$

B.

$p_{k+1}\cdot(p_{\lambda_1})^2 \leqq n < p_{k+1}\cdot(p_{\lambda_1+1})^2$, d. v. s. $\lambda_1 = \psi\left[\sqrt{\frac{n}{p_{k+1}}}\right]$;

$p_{k+2}\cdot(p_{\lambda_2})^2 \leqq n < p_{k+2}\cdot(p_{\lambda_2+1})^2$, » $\lambda_2 = \psi\left[\sqrt{\frac{n}{p_{k+2}}}\right]$;

. . . . . .

$p_{k+d}\cdot(p_{\lambda_d})^2 \leqq n < p_{k+d}\cdot(p_{\lambda_d+1})^2$, » $\lambda_d = \psi\left[\sqrt{\frac{n}{p_{k+d}}}\right]$;

$\delta_1 = \lambda_1 - k$; $\delta_2 = \lambda_2 - (k+1)$; . . . $\delta_d = \lambda_d - (k+d-1)$;

gäller formeln (8):

$$\psi(n) = \varphi(n, k) - 1 + k(D+1) + \frac{D(D-1)}{2} - \sum_{r=1}^{D}\psi\left(\frac{n}{p_{k+r}}\right) +$$

$$+ k\sum_{\mu=1}^{\delta_d}\delta_\mu + \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{d}\delta_\nu(\delta_\nu+2\nu-3) - \sum_{\varrho=1}^{d}\sum_{s=1}^{\delta_\varrho}\psi\left(\frac{n}{p_{k+\varrho}\cdot p_{k+\varrho+s-1}}\right) \quad (8).$$

Bevis: Samtliga tal i serien (1)

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, n \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

vilka äro relativa primtal till de k första absoluta primtalen, kunna denna gång uppdelas i följande $d+2$ *grupper*, där de utförda produkternas termer skulle bli gruppernas resp. termer.

Grupp 1.

$$1, p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots\ldots\ldots, P(n).$$

Grupp 2.

$$p_{k+1}\left[p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{p_{k+1}}\right)\right],$$

. . . . . .

$$p_{k+D}\left[p_{k+D} + p_{k+D+1} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{p_{k+D}}\right)\right].$$

Alldeles som nyss slutar *Grupp 2* och därmed även de kvadratiska relativa primtalen i och med denna rad, ty nästa rad skulle börja med $(p_{k+D+1})^2 = (p_{m+1})^2$, som ju $> n$ enligt antagandet. Men *gruppernas* antal är denna gång ingalunda härmed uttömt, ity att på grund av def. på k (i sats 4) även 3:e gradens termer kunna komma med i räkningen, av vilka $(p_{k+1})^3$ i så fall är den *minsta*. Vi måste alltså *fortsätta sålunda:*

Grupp 3: 1. (δ_1 st. rader.)

$$(p_{k+1})^2 \left[p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{(p_{k+1})^2}\right)\right];$$

$$p_{k+1} \cdot p_{k+2} \left[p_{k+2} + p_{k+3} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{p_{k+1} \cdot p_{k+2}}\right)\right];$$

. . . . . .

$$p_{k+1} \cdot p_{\lambda_1} \left[p_{\lambda_1} + p_{\lambda_1+1} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{p_{k+1} \cdot p_{\lambda_1}}\right)\right].$$

(3: 1 slut.)

Grupp 3: 2. (δ_2 st. rader.)

$$(p_{k+2})^2 \left[p_{k+2} + p_{k+3} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{(p_{k+2})^2}\right)\right];$$

. . . . . .

$$p_{k+2} \cdot p_{\lambda_2} \left[p_{\lambda_2} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{p_{k+2} \cdot p_{\lambda_2}}\right)\right].$$

(3: 2 slut.)

. . . . . .

Grupp 3: d. (δ_d st. rader.)

$$(p_{k+d})^2 \left[p_{k+d} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{(p_{k+d})^2}\right)\right];$$

. . . . . .

$$p_{k+d} \cdot p_{\lambda_d} \left[p_{\lambda_d} + \ldots\ldots + P\left(\frac{n}{p_{k+d} \cdot p_{\lambda_d}}\right)\right].$$

(3: d slut.)

1:o) Ingen av grupperna 3: 1—3: d kan innehålla någon mer *rad*, ty nästa rad i t. ex. *Grupp 3: 1* skulle *börja med* termen $p_{k+1}(p_{\lambda_1+1})^2$, som ju $> n$ *enligt antagandet.* Analogt resonemang gäller för de övriga grupperna.

2:o) Ingen mer grupp av *3:e graden* kan tillkomma, ty en sådan grupps *första* term skulle bli $(p_{k+d+1})^3$, som ju $> n$ *enligt antagandet.*

3:e) Ingen grupp av *högre grad* än 3:e graden kan tillkomma, ty en sådan grupps *första* term skulle bli $(p_{k+1})^4$, som ju $> n$ *enligt antagandet.*

De ovan uppskrivna grupperna, fullt uttömmande var för sig inom *sin* typ samt dessutom fullt uttömmande (men icke heller mer) såsom gruppkomplex, representera *alltså nätt och jämnt* samtliga relativa primtal $\leqq n$ till de k första absoluta primtalen, för vilket påståendes slutliga inseende det principiella resonemanget för beviset till formlerna (3) och (6) kan tillämpas utan vidare. Antalet samtliga termer i *grupperna* 1, 2, 3: 1—3: d är alltså $\varphi(n, k)$.

För att finna ett *annat uttryck* på samma termantal, låtom oss *räkna termerna* i gruppschemat ovan.

Enl. (7) fås termantalet för *grupp 1 och 2* att bli

$$T_{1,2} = \psi(n) + 1 - k(D+1) - \frac{D(D-1)}{2} + \sum_{r=1}^{D} \psi\left(\frac{n}{p_{k+r}}\right) \quad . \quad . \quad (9).$$

De återstående d st. gruppernas termer uppskriva vi *rad för rad* och summera till en början grupp för grupp, för att till slut sammamfatta samtliga summor i ett enda uttryck.

Termantalen bli nu:

För grupp 3: 1 (δ_1 st. rader):

$$T_{3:1} = \psi\left(\frac{n}{(p_{k+1})^2}\right) - k$$
$$+ \psi\left(\frac{n}{p_{k+1} \cdot p_{k+2}}\right) - (k+1)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\psi\left(\frac{n}{p_{k+1}\cdot p_{k+\delta_1}}\right)-(k+\delta_1-1)=$$

$$=\sum_{s=1}^{\delta_1}\psi\left(\frac{n}{p_{k+1}\cdot p_{k+s}}\right)-\delta_1 k-\frac{\delta_1(\delta_1-1)}{2}.$$

För Grupp 3: 2 (δ_2 st. rader)

fås genom att ersätta k med $k+1$ och δ_1 med δ_2, att

$$T_{3\cdot 2}=\sum_{s=1}^{\delta_2}\psi\left(\frac{n}{p_{k+2}\cdot p_{k+1+s}}\right)-\delta_2 k-\frac{\delta_2(\delta_2+1)}{2}.$$

. . . . . .

För Grupp 3: d (δ_d st. rader)

fås genom att hos grupp 3: 1 ersätta k med $k+d-1$ och δ_1 med δ_d, att

$$T_{3:\,d}=\sum_{s=1}^{\delta_d}\psi\left(\frac{n}{p_{k+d}\cdot p_{k+d-1+s}}\right)-\delta_d k-\frac{\delta^{\alpha}(\delta_d+2d-3)}{2}.$$

På grund härav fås

$$T_3=T_{3:1}+T_{3:2}+\ldots+T_{3:\,d}=\sum_{\varrho=1}^{\varrho=d}\sum_{s=1}^{\delta_\varrho}\psi\left(\frac{n}{p_{k+\varrho}\cdot p_{k+\varrho+s-1}}\right)$$

$$-k\sum_{\mu=1}^{d}\delta_\mu-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{d}\delta_\nu(\delta_\nu+2\nu-3) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (10).$$

Enligt (9) och (10) fås nu, emedan $\varphi(n,\,k)=T_{1,\,2}+T_3$, utan vidare formeln (8), *varmed Sats 4 är bevisad.*

Anm. Naturligtvis kunde man fått ett litet annat utseende på de två sista termerna i (10), *därest man ej önskar bryta ut faktorn* k, vilket vi däremot gjort för att få (8) i detta avseende mer analog med (6), där ju k är utbrutet. Eljest blir sista termen i (10) i stället mer analog med en annan motsvarande term i (6). Det hela är emellertid en fullkomligt likgiltig sak, alldenstund termerna i fråga äro rent *isolerade* termer i var sina resp. formler (3), (6) och (8), vilka

formler i sin tur naturligtvis också användas rent isolerade från varandra. Och att finna någon sorts lag för direkt generalisering av *Meissels* formel torde väl knappast vara tänkbart; vi hänvisa i detta fall till vad vi nedan yttrat om en av oss utförd, ehuru i denna uppsats ej meddelad ytterligare generalisering av *Meissels* formel (se § 6).

§ 5.

Ett par kontrollexempel på formel (8).

Ex. 1. $n=2\,000$. Det gäller nu att finna $\psi(n)$, d. v. s. att bestämma antalet absoluta primtal i området 1 t. o. m. 2 000.

A.

$$k=\psi\sqrt[4]{2\,000}=\psi(6)=3;$$
$$l=\psi\sqrt[3]{2\,000}=\psi(12)=5 \quad \because\ d=l-k=2;$$
$$m=\psi\sqrt{2\,000}=\psi(44)=14 \quad \because\ D=m-k=11;$$

B.

$$\lambda_1=\psi\sqrt{\frac{2\,000}{p_4}}=\psi\sqrt{\frac{2\,000}{7}}=\psi\sqrt{285}=\psi(16)=6 \quad \because\ \delta_1=3;$$
$$\lambda_2=\psi\sqrt{\frac{2\,000}{p_5}}=\psi\sqrt{\frac{2\,000}{11}}=\psi\sqrt{181}=\psi(13)=6 \quad \because\ \delta_2=2.$$

På grund härav fås nu enligt (8):

$$\psi(n)=\varphi(n,k)-1\ [=\varphi(2\,000,3)-1 \text{ (se ex. 1 efter sats 1)} = +533]$$
$$+\ k(D+1)[=\quad 3\cdot 12 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . = +36]$$
$$+\ \tfrac{1}{2}D(D-1)[=\tfrac{1}{2}\cdot 11\cdot 10 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . = +55]$$
$$+624$$
$$-\sum_{r=1}^{D}\psi\left(\frac{n}{p_{k+r}}\right)\Big[=-\sum_{r=1}^{11}\psi\left(\frac{2\,000}{p_{3+r}}\right)=$$
$$=-(61+42+36+30+27+23+19+18+16+15+14) \quad =-301]$$
$$+323]$$
$$+k\sum_{\mu=1}^{\delta_d}\delta_\mu\ [=3\sum_{\mu=1}^{2}\delta_\mu=3(3+2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . = +15]$$

$$+\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{d}\delta_\nu(\delta_\nu+2\nu-3)\Big[=\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{2}\delta_\nu(\delta_\nu+2\nu-3)=$$

$$=\tfrac{1}{2}[3(3+2-3)+2(2+3-3)]\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .=\ +6\Big]$$

$$+\ 344$$

$$-\sum_{\varrho=1}^{d}\sum_{s=1}^{\delta_\varrho}\psi\left(\frac{n}{p_{k+\varrho}\cdot p_{k+\varrho+s-1}}\right)\Big[=\ -\sum_{\varrho=1}^{2}\sum_{s=1}^{\delta_\varrho}\psi\left(\frac{2\,000}{p_{3+\varrho}\cdot p_{3+\varrho+s-1}}\right)=$$

$$=-\sum_{s=1}^{3}\psi\left(\frac{2\,000}{p_4\cdot p_{4+s-1}}\right)-\sum_{s=1}^{2}\psi\left(\frac{2\,000}{p_5\cdot p_{5+s-1}}\right)=$$

$$=-(12+9+8)-(6+6)]\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .=\ -\ 41$$

Alltså $\psi(2\,000)=303$. 303.

Ex. 2. Sök antalet absoluta primtal mellan 1 och 10 000, d. v. s. bestäm $\psi(10\,000)$.

Lösning: $n=10\,000$;

$k=\psi\sqrt[4]{10\,000}=\psi(10)=4;$

$l=\psi\sqrt[3]{10\,000}=\psi(21)=8;\quad d=l-k=4\ (\because\ \delta_d=\delta_4);$

$m=\psi\sqrt{10\,000}=\psi(100)=25;\quad D=m-k=21.$

$$\lambda_1=\psi\sqrt{\frac{10\,000}{p_5}}=\psi\sqrt{\frac{10\,000}{11}}=\psi\sqrt{909}=\psi(30)=10$$
$$\because\ \delta_1=\lambda_1-k=6;$$

$$\lambda_2=\psi\sqrt{\frac{10\,000}{p_6}}=\psi\sqrt{\frac{10\,000}{13}}=\psi\sqrt{769}=\psi(27)=9$$
$$\because\ \delta_2=\lambda_2-(k+1)=4;$$

$$\lambda_3=\psi\sqrt{\frac{10\,000}{p_7}}=\psi\sqrt{\frac{10\,000}{17}}=\psi\sqrt{588}=\psi(24)=9$$
$$\because\ \delta_3=\lambda_3-(k+2)=3;$$

$$\lambda_4=\psi\sqrt{\frac{10\,000}{p_8}}=\psi\sqrt{\frac{10\,000}{19}}=\psi\sqrt{526}=\psi(22)=8$$
$$\because\ \delta_4=\lambda_4-(k+3)=1.$$

Vidare är: $\varphi(n,\ i)=\varphi(n,\ i-1)-\varphi\left[E\left(\frac{n}{p_i},\ i-1\right)\right].$

Alltså fås:

$+$ I. $\varphi(n,\ k) = \varphi(10\,000,\ 4) = \varphi(10\,000,\ 3) - \varphi(1\,428,\ 3);$

$\varphi(10\,000,\ 3) = \varphi(10\,000,\ 2) - \varphi(2\,000,\ 2);$

$\varphi(10\,000,\ 2) = \varphi(10\,000,\ 1) - \varphi(3\,333,\ 1) =$

$= 5\,000 - 1\,667 = 3\,333;$

$\varphi(\ 2\,000,\ 2) = \varphi(\ 2\,000,\ 1) - \varphi(\ 667,\ 1) =$

$= 1\,000 - 333 = 667.$

$\because\ \varphi(10\,000,\ 3) = 3\,333 - 667 = 2\,666.$

Vidare är $\varphi(1\,428,\ 3) = 381,$

$\because\ \varphi(n,\ k) = 2\,666 - 381 = 2\,285.$

$+$ II. $k(D+1) = 4 \cdot 22 = 88.$

$+$ III. $\frac{1}{2}D(D-1) = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 20 + 210.$

Låt $\psi(a+b)$ betyda $\psi(a) + \psi(b).$

$- \text{ IV. } \sum_{r=1}^{D} \psi\left(\frac{n}{p_{k+r}}\right) = \sum_{r=1}^{21} \psi\left(\frac{10\,000}{p_{4+r}}\right) = \psi(909 + 769 + 588 +$

$+ 526 + 434 + 344 + 322 + 270 + 243 + 232 + 212 +$

$+ 188 + 169 + 163 + 149 + 140 + 136 + 126 + 120 +$

$+ 112 + 103) = 155 + 136 + 107 + 99 + 84 + 68 +$

$+ 66 + 57 + 53 + 50 + 47 + 42 + 39 + 38 +$

$+ 35 + 34 + 32 + 30 + 30 + 29 + 27 = 1\,258.$

$+ \text{ V. } k \sum_{\mu=1}^{d} \delta_\mu = 4 \sum_{\mu=1}^{4} \delta_\mu = 4(6 + 4 + 3 + 1) = 56.$

$+ \text{ VI. } \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{d} \delta_\nu(\delta_\nu + 2\nu - 3) = \frac{1}{2}[6(6+2-3) + 4(4+4-3) +$

$+ 3(3+6-3) + (1+8-3)]$

$= \frac{1}{2}(30 + 20 + 18 + 6) = 37.$

$- \text{ VII. } \sum_{\varrho=1}^{d} \sum_{s=1}^{\delta_\varrho} \psi\left(\frac{n}{p_{k+\varrho} \cdot p_{k+\varrho+s-1}}\right) = \sum_{\varrho=1}^{4} \sum_{s=1}^{\delta_\varrho} \psi\left(\frac{10\,000}{p_{4+\varrho} \cdot p_{4+\varrho+s-1}}\right).$

$$\varrho = 1 \quad (\because\ \delta_\varrho = 6).$$

$s = 1)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_5 \cdot p_5} = \psi \dfrac{10\,000}{11 \cdot 11} = \psi \dfrac{909}{11} = \psi 82 = 22;$

$s = 2)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_5 \cdot p_6} = \psi \dfrac{10\,000}{11 \cdot 13} = \psi\ 69 = \ldots . 19;$

$s = 3)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_5 \cdot p_7} = \psi \dfrac{10\,000}{11 \cdot 17} = \psi\ 53 = \ldots . 16;$

$s = 4)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_5 \cdot p_8} = \psi \dfrac{10\,000}{11 \cdot 19} = \psi\ 47 = \ldots . 15;$

$s = 5)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_5 \cdot p_9} = \psi \dfrac{10\,000}{11 \cdot 23} = \psi\ 39 = \ldots . 12;$

$s = 6)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_5 \cdot p_{10}} = \psi \dfrac{10\,000}{11 \cdot 29} = \psi\ 31 = \ldots . 11;$

Summa: 95.

$$\varrho = 2 \quad (\because\ \delta_\varrho = 4).$$

$s = 1)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_6 \cdot p_6} = \psi \dfrac{10\,000}{13 \cdot 13} = \psi\ 59 = \ldots . 17;$

$s = 2)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_6 \cdot p_7} = \psi \dfrac{10\,000}{13 \cdot 17} = \psi\ 45 = \ldots . 14;$

$s = 3)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_6 \cdot p_8} = \psi \dfrac{10\,000}{13 \cdot 19} = \psi\ 40 = \ldots . 12;$

$s = 4)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_6 \cdot p_9} = \psi \dfrac{10\,000}{13 \cdot 23} = \psi\ 33 = \ldots . 11;$

Summa: 54.

$$\varrho = 3 \quad (\because\ \delta_\varrho = 3).$$

$s = 1)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_7 \cdot p_7} = \psi \dfrac{10\,000}{17 \cdot 17} = \psi\ 34 = \ldots . 11;$

$s = 2)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_7 \cdot p_8} = \psi \dfrac{10\,000}{17 \cdot 19} = \psi\ 30 = \ldots . 10;$

$s = 3)$ $\psi \dfrac{10\,000}{p_7 \cdot p_9} = \psi \dfrac{10\,000}{17 \cdot 23} = \psi\ 25 = \ldots . 9;$

Summa: 30.

$$\varrho = 4 \quad (\because \delta_\varrho = 1).$$

$$s = 1) \quad \psi\frac{10\,000}{p_8 \cdot p_8} = \psi\frac{10\,000}{19 \cdot 19} = \psi 27 = \ldots\ldots 9.$$

Alltså fås $\mathrm{I} - 1 + \mathrm{II} + \mathrm{III} - \mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VI} - \mathrm{VII} =$
$2\,285 - 1 + 88 + 210 - 1\,258 + 56 + 37 - 95 - 54 - 30 - 9$
$= 2\,676 - 1\,447 = 1\,229.$ *D. v. s.* $\psi(10\,000) = 1\,229.$

§ 6.

Ett par ord om nästa generalisering av Meissels formel.

Rent teoretiskt sett kan man naturligtvis generalisera *Meissels* formel huru långt som helst, vare sig man nu vill använda vår i det föregående utvecklade generaliseringsmetod eller någon annan. Huruvida man medelst en sålunda företagen generalisering kan vinna något praktiskt resultat, lämnar jag därhän, då jag nämligen ej haft tid att för *större* tal tillämpa den av mig utarbetade generaliseringen n:r 2 av Meissels formel, d. v. s. den generalisering, där index k uppfyller villkoret

$$(p_k)^5 \leqq n < (p_{k+1})^5, \text{ d. v. s. } k = \psi\sqrt[5]{n}.$$

Emellertid blir resultatet av en sådan generalisering oerhört komplicerat liksom även hela bevisföringen. Jag kan ju för kuriositetens skull nämna, att vid den av mig sålunda utförda generaliseringen n:r 2 upptager själva lydelsen på den ifrågavarande satsen icke mindre än tre foliosidor i manuskriptform; och i den slutliga formeln ingå *bland annat* sju enkla, fem dubbla och en tredubbel summa.

Låt oss antaga att man alltså med denna generalisering av *Meissels* formel ville bestämma antalet absoluta primtal mellan 1 och ettusen billioner (10^{15}), så skulle enbart den i formeln ingående φ-funktionen få utseendet

$$\varphi[10^{15}, \psi(1\,000)],$$

vilket kanske vore överkomligt?

Med *Meissels* egen formel skulle däremot φ-funktionen få utseendet

$$\varphi\,[10^{15},\ \psi(100\,000)],$$

vilket väl knappast kan tänkas utförbart.

Man torde kunna fråga, vilken *den egentliga fördelen* är med såväl *Meissels* formel som med den av oss ovan härledda jämte andra fortsatta generaliseringar av samma formel. Svaret ligger i öppen dag: *φ-funktionen blir i regeln enklare* för varje ny generalisering. Men på samma gång bli formlerna själva som sagt mer och mer invecklade. Det gäller därför varje gång att väga fördel mot nackdel. Jag har här ovan beräknat $\psi(10\,000)$ medelst den första generaliseringen av *Meissels* formel, men jag har också beräknat samma funktion $\psi(10\,000)$ medelst den *andra* (i denna uppsats icke anförda, endast omnämnda) *generaliseringen* och därvid funnit räkningarna något litet *besvärligare*, såsom väl var att vänta. Men skulle n uti $\psi(n)$ växa till mycket stora belopp, så blir naturligtvis förhållandet det rakt omvända, ity att den med generaliseringen följande förenklingen av den besvärliga φ-funktionen mer än nog uppväger formelns belastning med större antal termer.

Generaliseringen n:r 2 av *Meissels* formel är så »mäktig», att för $\psi(10\,000)$ komma tvenne dubbelsummor och den tredubbla summan icke alls med i kalkylerna, och åtskilliga övriga enkla och dubbla summor bli ytterst lättbestämda.

Slutanmärkning: Liksom den å pag. 5 uppställda »*praktiska regeln*» ansluter sig som ett sorts korollarium till *Sats* 2, så torde motsvarande »praktiska regler» låta uppställa sig såsom korollarier till satserna 3 och 4 (o. s. v.). Undersökningen (av värdet) av dessa eventuella nya praktiska regler har jag ännu ej slutfört.

Om glimlampan som voltmeter.

Av C. E. BLOM.

I en föregående uppsats har redogjorts för glimlampans konstruktion och viktigaste egenskaper och för dess användning inom tekniken liksom för dess mångsidiga användbarhet såsom hjälpmedel vid fysikundervisningen, bl. a. såsom känslig galvanometer.[1] Förf. vill i denna uppsats visa, huru lampan kan användas såsom voltmeter för såväl lik- som växelström.

I nyssnämnda uppsats framhölls, att lampan, som är ett »geisslerrör», fordrar en viss minsta spänning för att tända. Det är denna lampans egenskap, man begagnar sig av i det följande. Om tändspänningens konstans, som är en förutsättning för metoden, mera senare.

1. *Användning som likströmsvoltmeter.* Mätningsprincipen framgår av fig. 1.

E är den strömkälla, vars spänning man vill mäta, *L* glimlampan och *ABC* en potentiometer, som tänkes kopplad till likströmsnätet. Strömkällans ena pol är förbunden med *C*, som antages vara jordad, och den andra polen *D* med glimlampans ena elektrod. Den andra elektroden är förenad med den rörliga kontakten *B*. Spänningen mellan *B* och *C* mätes med en voltmeter.

Genom att medelst en omkastare frånkoppla *E* och förena *D* direkt med *C*

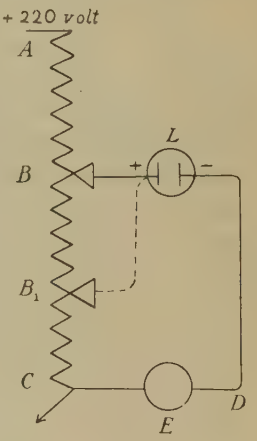


Fig. 1.

[1] Denna tidskrift, sid. 13, 6 årg, 1922—23. Uppsatserna utgöra ett sammandrag av ett föredrag inför Fysiska Sällskapet i Stockholm i nov. 1921.

bestämmes lampans tändspänning (kontakten vid B), som antages vara 160 volt. Kontakten förskjutes sedan mot C och E tillkopplas, så att D blir negativ pol. Om D antages ha potentialen — 100 volt, tänder lampan, då kontakten flyttats till en punkt B_1 med potentialen + 60 volt.

Skillnaden mellan voltmeteravläsningarna i B och B_1, ger tydligen E:s storlek. Spänningen B_1C kallas i det följande hjälpspänningen. Den sökta spänningen är således skillnaden mellan tändspänningen och hjälpspänningen.

Emedan lampan ända upp till tändspänningen ej släpper fram någon mätbar ström — den är åtminstone mindre än 10^{-8} amp. — förbrukar denna »glimvoltmeter» ej någon ström och har därför karaktären av en elektrometer med liten kapacitet. Placeras lampan tätt intill voltmetern, ser man, när lampan tänder, utan att behöva fixera densamma. Man kan därför ha blicken riktad på voltmetern och har därför endast ett instrument att observera.

Eftersom den sökta spänningen (E) är en differens mellan två voltmeteravläsningar, ändras noggrannheten med E:s storlek. Användes en god lampa, varierar tändspänningen endast med några tiondedels volt (se sid. 4). Vid E-värden större än 100 volt är därför felet i regel mindre än 0,5 %. Vid E-värden av storleken 10 volt är det redan några procent, varför metoden ej lämpar sig för mindre spänningar än den sistnämnda. Den övre gränsen för mätområdet utgöres av lampans tändspänning, d. v. s. 150 à 200 volt.[1]

Såsom en illustration till denna mätmetods användbarhet må anföras, att den är särdeles lämplig för spänningsmätning, då det gäller att medelst Jouberts skiva bestämma kurvformen för en växelström.

Fig. 2 visar den koppling, som förf. därvid använt. J är en Jouberts skiva, som är kopplad på samma axel som växelströmskällan (E). Som bekant består Jouberts skiva

[1] Det är ingen svårighet att göra lampor med högre tändspänning och därmed utsträcka mätområdet uppåt. Seriekoppling av flera lampor ger inga noggranna värden. Dock erhålles rätt så god approximation, om man sörjer för att lamporna äro väl isolerade.

av en inställbar kontaktanordning, varigenom man kan taga ut momentana strömstötar motsvarande en viss fas och således en viss spänning.[1] Dessa uppsamlas av en parallellkopplad kondensator *K*, vars spänning man därpå mäter. Det mätinstrument, man därvid använder, får endast förbruka en mycket svag ström, varför ofta en känslig, kalibrerad galvanometer med förkopplat stort motstånd användes som voltmeter. När man härvid tager ut ström från kondensatorn, måste man alltid tillse, att tillförseln till densamma sker obehindrat, d. v. s. att kontakten vid skivans släpringar är god. Ofta vållar denna svårigheter. Vid noggranna mätningar brukar man därför undvika att taga ström från kondensatorn genom att mäta spänningen med en kompensationsanordning. Detta är ju emellertid en rätt tidsödande procedur och för övrigt, när det gäller höga spänningar, ej alldeles utan risk för mätinstrumenten. »Glimvoltmetern», som är fullständigt riskfri, ej förbrukar någon ström och arbetar raskt, har visat sig ge lika goda värden som kompensationsanordningen.[2]

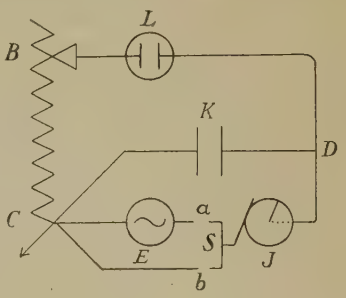


Fig. 2.

Vid *S* är inkopplad en omkastare, vid mätningarna sluten vid *a*. Tändspänningen bestämmes då och då under försöket genom att sluta omkastaren vid *b*; på samma gång kontrolleras släpkontakternas godhet. Som kondensator har använts en papperskondensator på några tiondedels mikrofarad.

Om ej större noggrannhet erfordras, kan omkastaren uteslutas, varigenom kopplingen blir enklare och utan

[1] Se t. ex. O. Gallander. Elem. Elektricitetslära.

[2] Dock naturligtvis ej för små värden (under 10 volt). Att noggrannheten är mindre här betyder ej så mycket i praktiken. Är maskinens maximalspänning 50 à 100 volt, förlöper spänningskurvan i regel nära nog linjärt inom nämnda område.

svårighet kan användas även vid den elementära undervisningen.

Den som ej har någon större växelströmsgenerator, men som har tillgång till växelström, kan anbringa Jouberts skiva på en synkronmotor. Saknas starkströmsresurser, kan man, såsom lektor Gallander påpekat, aptera en Jouberts skiva på en vanlig Siemens telefoninduktor och bestämma dess kurvform.[1] Dylika giva vid större hastighet spänningar av 100 à 150 volt (maximalt). Strömstyrkan är emellertid obetydlig på grund av induktorns stora motstånd. »Glimvoltmetern» är här synnerligen lämplig.

2. *Tändspänningens konstans.* Den ovan beskrivna metoden grundar sig på tändspänningens konstans. En undersökning av ett stort antal i handeln förekommande lampor har visat, att tändspänningen, såsom man kunde vänta, är en individuell storhet, som ändrar sig från lampa till lampa, även inom samma typ och för övrigt är olika för olika strömriktning.

Vad konstansen angår, så är den olika för olika typer. Den är mindre god för t. ex. kupollamporna från Pintsch och Osram. Här varierar tändspänningen rätt så mycket; differenser på 5 à 10 volt vid mätningar som följa på varandra äro ej ovanliga. Hos andra typer åter, särskilt bokstavslamporna från Pintcsh, är konstansen så god, att olika bestämningar ej differera på mer än några tiondedels volt. Detta gäller dock ej de första bestämningarna, vilka ofta visa fallande tendens. Före användningen bör man därför skicka en svag ström genom lampan. Man bör emellertid ej i onödan överlasta densamma. En starkare och längre strömgenomgång förorsakar ofta en liten höjning av tändspänningen; denna går ofta tillbaka efter en tids vila.[2]

[1] Denna tidskrift sid. 85, 1 årg.

[2] Orsaken till den fallande tendensen i början torde vara att söka i en förändring av elektrodytan. Däremot är det osannolikt, att den kan bero på kvarvarande joner från föregående urladdning; dessa försvinna nämligen alltför hastigt.

Att starkare strömgenomgång förorsakar en höjning av tändspänningen, kan möjligen bero på ett »hårdnande» förorsakat av gasocklusion.

Förf. har företrädesvis begagnat sig av nyssnämnda bokstavslampor vid sina mätningar.

3. *Användning som växelströmsvoltmeter.* Lampan kan även användas som voltmeter för växelström. Man kan medelst densamma på ett ytterst enkelt sätt erhålla spänningens maximalvärde (amplitud). Låt E i fig. 1 vara en växelströmkälla som ger + 100 volt maximalt. Är lampans tändspänning såsom förut 160 volt och hjälpspänningen 60 volt, kommer en strömstöt att passera lampan varje gång D befinner sig på — 100 volt. Stöten varar ett ögonblick, tills en viss minimispänning uppnås. De små stötarna ge upphov till ett ljus, visserligen svagt men tack vare sin färg fullt tydligt även i starkt dagsljus.

Vid mätning av växelström har man alltså att förfara såsom förut. Man ökar hjälpspänningen, tills lampan just tänder. Skillnaden mellan tändspänningen och hjälpspänningen ger då växelspänningens amplitud.

Härvid förutsättes, att tändspänningen för växelström och likström är densamma. Detta är dock ej fallet, varför metoden endast ger ett approximativt värde. Anställda försök visa, att tändspänningen för växelström alltid är större än för likström beroende på en viss tröghet hos själva tändprocessen; därom mera senare. Den bestämda amplituden blir således för liten.

I fig. 3 är såsom abscissa avsatt den verkliga amplituden och såsom ordinata differensen mellan denna och den observerade, d. v. s. avvikelsen från det riktiga värdet; allt i volt.

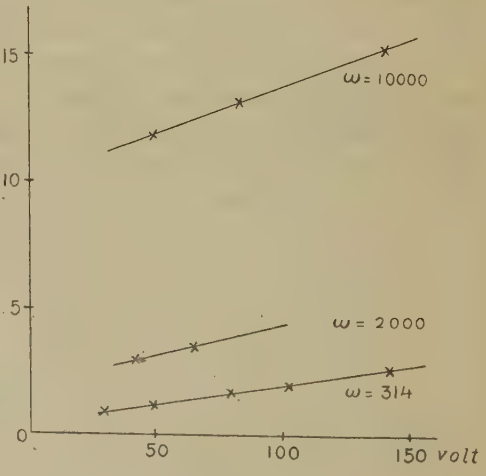


Fig. 3.

ω betecknar frekvensen multiplicerad med 2π; $\omega = 314$ motsvarar alltså 50-periodig ström.[1]

Kurvorna, som förlöpa nära nog linjärt för större amplituder, böja av mot origo för mindre värden. Som av fig. 3 framgår, växer differensen såväl med växelströmmens amplitud som med frekvensen. Differensens storlek kan tagas som ett mått på trögheten; ju större tröghet desto större differens. Samtliga lamptyper giva dylika »tröghetskurvor», vilka dock variera från lampa till lampa. Lampor av kupolform visa mycket stor tröghet, under det att denna är relativt liten hos bokstavslampor från Pintsch; fig. 3 hänför sig till en dylik. Även för en sådan är dock avvikelsen stor vid större frekvenser. Vid i starkströmtekniken förekommande frekvenser erhåller man emellertid fullt användbara värden. »Tröghetskurvan» är för frekvenser av denna storlek i det närmaste en rät linje genom origo. För bokstavslampor från Pintsch kan man räkna med en differens på 2 à 4 % vid 50 perioder. Ökar man därför det observerade amplitudvärdet med 2 %, har man ett värde, som i allmänhet är riktigt på 2 % när, vilken noggrannhet ofta är fullt tillräcklig vid tekniska mätningar. Om frekvensen är 25, kan man gott använda det okorrigerade värdet.[2]

Metoden ger således fullt användbara värden vid lägre frekvenser och är den enklaste för bestämning av maximalvärdet av en växelspänning på 10 till 150 volt, som förf. känner. Försök ha visat, att — åtminstone vid lägre frekvenser — kurvformen hos strömmen spelar mycket liten roll, varför metoden kan användas även vid mycket spetsiga kurvor.

[1] De verkliga amplitudvärdena bestämdes för 50 periodig växelström medelst Jouberts skiva. Vid de högre frekvenserna erhöllos de ur spänningens effektivvärde genom multiplikation med $\sqrt{2}$; här användes en oscillator, som gav mycket god sinusström.

[2] Att bestämma tröghetskurvor för högre frekvenser och på så sätt kalibrera en lampa för att kunna använda den för större frekvenser, lönar sig ej. Det är alltför mödosamt; dessutom är trögheten beroende på belysningen av lampan (se sid. 8). De ovan anförda värdena gälla vid belysning med diffust dagsljus.

Metoden tillåter mätningar av växelström utan särskilda växelströmsinstrument, vilket kan vara av värde för den som saknar dylika.

Några exempel på metodens användbarhet må anföras:

a. Bestämmes medelst metoden den maximala spänningen och samtidigt med en växelströmsvoltmeter den effektiva, får man en god upplysning angående kurvformen. Att för sinusström den förra spänningen är $\sqrt{2} \times$ den senare visas sålunda på enkelt sätt.

b. Inkopplas, såsom *E* i fig. 1, en vanlig Siemens telefoninduktor, finner man, att maximalspänningen är prop. mot rotationshastigheten. En vanlig växelströmsvoltmeter kräver i regel för stark ström för att vara användbar för detta ändamål. Kurvformen avviker för övrigt alltför mycket från sinusformen, för att den skall ge ett gott värde.

c. Inkopplas sekundärledningen på ett litet induktorium, visas och uppmätes den stora skillnaden mellan slutnings- och öppningsströmmens spänning. Ett vanligt, även litet, induktorium ger oftast för höga spänningar. Man kan därför använda sig av den vid alla skolor förekommande lilla demonstrationsapparaten för induktionsströmmar, bestående av en primär och en sekundär rulle med relativt litet omsättningstal. Primärrullen kopplas i serie med en ringklocka eller med primärrullen till en annan induktionsapparat, vars hammare får tjäna som strömbrytare. Såsom exempel må anföras, att vid ett tillfälle erhölls 2 volts slutnings- och 60 volts öppningsström. Det förra värdet erhölls, när spolen var inkopplad så, att *D*:s lägsta potential var — 2 volt; det andra vid omkastning av sekundärrullens poler, då *D*:s lägsta potential var — 60 volt.

Järnkärnans betydelse liksom införandet av en uppslitsad och en icke uppslitsad metallcylinder i primärrullen kan demonstreras kvantitativt.

d. Genom att mäta spänningen i en transformators båda lindningar kan dess omsättningstal bestämmas.

4. *Tändningens fördröjning.* Att tändspänningen för växelström är större än för likström, beror, såsom redan nämnts,

på en tröghet hos själva tändprocessen. Ibland är denna tröghet synnerligen iögonenfallande. Det torde nog ha observerats av den som använt glimlampor för nattbelysning, att det ibland kan dröja flera sekunder efter inkopplingen på likströmsnätet, innan lampan tänder. Det är mera sällan, fördröjningen är så stor, att man lägger märke till den. Närmare undersökning visar emellertid, att man alltid har att räkna med någon fördröjning, ehuru den oftast är mycket kortvarig.[1]

När tändprocessen sålunda krävde en viss tid, låg det nära till hands att undersöka, om tändspänningen berodde på den tid, spänningen låg an. Det visade sig, att ju kortare denna tid var, desto högre var tändspänningen. Att tändspänningen för växelström ökas med frekvensen (fig. 3), står i full överensstämmelse härmed.

Att tändningen tager en viss tid, står i samband med att det joniseringsarbete, som den pålagda spänningen måste utföra, innan gasen blir ledande, ej kan ske momentant. Enligt vår föreställning om jonisation genom stöt är det fullt naturligt, att det måste taga en viss tid, innan jonerna nått den erforderliga hastigheten, och framför allt, innan tillräckligt antal joner hinner att bildas och fördelas i fältet. Det överensstämmer även med denna föreställning, att en kortare tid kan ersättas av en högre spänning.

Ökas genom yttre jonisator antalet initialjoner, bör den erforderliga tiden bli kortare, vilket också visar sig vara fallet. Vid bestrålning med ljus från en stark båglampa minskas alltid trögheten; differensen mellan tändspänningen för lik- och växelström blir mindre. Ett radioaktivt preparat åstadkommer liknande verkan.

En undersökning av belysningsstyrkans inverkan på trögheten visade, att trögheten i mörker ofta var avsevärd, och att den vid ökad belysning avtog, först hastigt sedan långsammare. Olika grader av diffust dagsljus visade knappast någon olika inverkan. Först vid placering i direkt solljus

[1] Schröter utnyttjar denna fördröjning för tekniska ändamål. Se Elektrot. Zeitschrift. s. 121, 1921.

eller starkt artificiellt ljus minskades den ytterligare. Helt kunde trögheten ej elimineras med de av förf. använda jonisatorerna. Stark bågljusbelysning reducerade de i fig. 3 angivna differenserna — vilka hänföra sig till diffust dagsljus — med 30 till 60 % för respektive högre och lägre frekvenser.

Det bör anmärkas, att vid användning av yttre jonisator i intet fall själva tändspänningens storlek ändrades.

5. *Tröghet vid urladdning i luft.* De nu beskrivna trögheтsfenomenen hos glimlamporna äga sin motsvarighet vid gnistbildning i luft och har varit föremål för åtskilliga undersökningar. Detta på grund av deras stora praktiska betydelse; man använder ju särskilt inom tekniken gnistgap för bestämning av höga spänningar, och eftersom det här i regel är fråga om växelström, är det av vikt, att gnistgapet är fritt från tröghet.

Den klassiska undersökningen på detta område är utförd av *Warburg* (1896), vilken visade, att gnistpotentialen ökas, då belastningstiden minskas, ävensom att en jonisator minskar eller helt upphäver trögheten men ej sänker själva gnistpotentialen.[1] Efter *Warburg* brukade man vid mätningen bestråla gnistgapet för att eliminera trögheten. Men detta är besvärligt och ej alltid effektivt.

På senare år har amerikanaren *Peek*[2] ägnat saken en ingående undersökning och efter undersökning av olika gnistgap funnit, att gapet mellan stora kulor — med minst 25 cm radie placerade på ett avstånd från varandra mindre än diametern — är praktiskt taget tröghetsfritt. Gapet mellan spetsar visar däremot tröghet. Peeks kulgap med av honom bestämda urladdningspotentialer användas numera i stor utsträckning vid tekniska mätningar. Det är tydligen växelspänningens maximalvärde, som härvid erhålles. Kulgapet är inom vida gränser oberoende av kurvformen.

Trögheten hos glimlamporna är avsevärt större än hos

[1] Enligt *Herweg* (1907) sänkes potentialen av en stark jonisation, åstadkommen med katodstrålar.

[2] *Peek*, Dielectric Phenomena, New-York 1915.

gnistgapen i luft, vilket torde stå i ett visst samband med en iakttagelse av Peek, nämligen att trögheten växer med förtunningen.

6. *Whitehead's glimljusvoltmeter.* Det kan ha sitt intresse att i detta sammanhang påpeka en voltmeter användbar för spänningar upp till 50 000 à 150 000 volt, vilken grundar sig på samma princip som »glimlampvoltmetern», nämligen på konstansen hos glimljuspotentialen. Apparaten, konstruerad av amerikanaren *Whitehead*,[1] består av ett stort urladdningsrör av metall, ett par meter långt och omkring en halv meter i diameter. Glimurladdning äger rum mellan en elektrod bestående av en plåt böjd i form av en cylinder och en tråd spänd längs dennas axel. Genom att ändra luftens tryck medelst en pump från några 100 mm till några atmosfärer kan glimljuspotentialen ändras inom vida gränser. Trycket minskas, tills glimljuset uppträder, då en manometer avläses och spänningen erhålles. Apparaten måste tydligen först kalibreras. Man torde ha skäl ifrågasätta dess praktiskhet. Emedan relativt enkla lagar befunnits gälla för urladdningar i densamma, besitter den dock ett obestridligt teoretiskt intresse. Noggrannheten är större än hos gnistgapet, varför det ej är uteslutet att instrumentet kan få användning såsom normalinstrument.

*

De mätningar, som ligga till grund för ovanstående uppsats, utfördes under sommaren och hösten 1921 dels vid Telegrafverkets materialprovningsanstalt, dels vid Tekniska högskolans elektrotekniska laboratorium. Förf. ber att få framföra ett tack till dessa institutioners föreståndare och assistenter.

[1] Journal of the Amer. Inst. of Electr. Eng. 1920 och 1922.

En amerikansk skoltidskrift för matematik, fysik etc.

Av JOHN LUNDBERG.

Sedan ett par år tillbaka har undertecknad prenumererat på en amerikansk tidskrift av i viss mån samma art som »Tidskrift för elementär matematik etc.» Då denna torde vara obekant för ett stort antal av de svenska lärare, vilka undervisa i den ifrågavarande ämnesgruppen, tillåter jag mig med nedanstående påpeka dess existens och något av vad, som är att hämta ur den.

Den bär titeln »School Science and Mathematics» och täcker som härav framgår ett något vidsträcktare område än motsvarande svenska publikation. Å andra sidau har den i stort sett en mera elementär läggning. Tidskriften ägnar en betydlig del av sitt utrymme åt redogörelser för olika undervisningsmetoder, vilket är helt naturligt, då ju de amerikanska skolorna icke äro ensartat organiserade över hela landet, utan en ganska vid marginal lämnas åt den enskilde lärarens experimenterande med olika sätt att lägga undervisningen. Metodernas resultat söker man belysa och ge rent siffermässiga uttryck åt genom en minutiös statistik över de svar, som erhållits vid skriftliga prov med eleverna. Dylika prov — snarast motsvarande vad vi kalla »lappskrivningar» — tyckas i Förenta Staterna användas i mycket större utsträckning än hos oss. Avhandlingarna av nu nämnd art, med en massa långrandiga tabeller, verka rätt så egendomliga på en svensk läsare.

Utom dylika uppsatser innehåller »School Science» emellertid mycket annat. Rubrikerna till några av de längre artiklarna i senaste häftet (juni 1922) torde ge en föreställ-

ning härom: Concerning the importance of the study of plant diseases in high school agriculture; The projection of the Brownian movement; The uses of algebra in study and reading, The presentation and importance of reversible chemical reactions; A general gas-law apparatus; Some practical projects in teaching physics; A 3000-volt lead-plate, shop-made storage battery, etc.

I slutet av varje häfte finnes ett »Problem Department», innefattande dels matematiska problem, dels problem och frågor rörande biologi, fysik och kemi. De fysikaliska problemen röra sig nästan uteslutande inom ramen av mekanik och värmelära. Frågorna däremot fördela sig över hela fysiken. En del av dem äro examensuppgifter från olika skolor, en del fristående. De förra äro i regel av ganska enkel beskaffenhet, men till gengäld många vid varje prov och skola besvaras på en förhållandevis kort tid, t. ex. en halv timme för tjugofem frågor, vilka alla innehålla — låt vara enkla — räkneuppgifter. De fristående frågorna äro ofta, åtminstone i formuleringen, rätt »amerikanska». Jag medtar som exempel även en matematisk uppgift, vilken ej skulle passa illa i realskolexamen:

»Till betonggjutning å en gata användes en blandning av 1 volymdel cement, 3 volymdelar grus och 6 volymdelar makadam. Cementen framforslas i säckar om 1,3 kubikfot, sanden och makadamen i skottkärror om 4 kubikfot. Allt materialet upplägges i högar för var 30:e fot av gatans längd. Hur många cementsäckar och hur många kärror grus och makadam måste avstjälpas i varje sådan hög, om gatubredden än 40 fot och betonglagret skall göras 5 tum tjockt?»

»Kulan till en Colt-pistol har rund mässingsspets under det bakre delen är av bly. Vilken ända av en sådan kula kommer ned först, om kulan skjutes ut i luften?»

»Antag, att vi ha tre ihåliga aluminiumkulor. Den ena pumpas lufttom, i den andra låta vi luften behålla atmosfärens tryck, i den tredje inpressas luft till låt oss säga 25 pounds tryck. Nu taga vi var och en av dessa alumi-

niumkulor till kärna i en golfboll. Vilken av bollarna går längst, om de erhålla precis lika kraftiga slag?»

Av nästan större intresse äro emellertid de då och då införda samlingarna av sådana frågor, som elever ställt till sina lärare. Det framgår av de uppsatser, vari dessa frågeserier förekomma, att en amerikansk lärare anses pliktig besvara alla dylika frågor. Kan han ej göra det på rak arm, får han på ett eller annat sätt skaffa sig reda på svaren, där upplysning står att vinna. En del dylika frågor följa nedan. De äro, som synes, ej alla så enkla att besvara ex tempore:

Vilka dimensioner på vattenledningsrör äro tillåtna i bostadshus?

Vilken relation bör det vara mellan fönsteryta och golvyta i ett boningsrum och i ett skolrum?

I vilka avseenden skiljer sig en eldstad för antracit från en för gas-kol?

Varför ge somliga fonografnålar starkare ljud än andra på samma skivor?

Vilken sorts tjära är bäst till spån-tak?

Hur är utväxlingen i en Fordbil inrättad?

Hur kunde man få så mycket helium att fylla luftskepp med under kriget?

Hur gör man »tomte-bloss»?

Vad är det i skokräm, som gör skorna blanka?

Varpå beror det, att kitt hårdnar?

Varför krympes ej ylle av »Lux»?

Utom artiklar och problem av nu nämnd art, innehåller tidskriften referat av nyutkommen litteratur samt förteckning över innehållet i sådana periodiska publikationer, som kunna tänkas intressera läsekretsen. Härigenom får man — vilket ju eljest är mycket svårt — reda på amerikanska läroböcker, av vilka det alltid kan ha sitt intresse att studera en och annan, då de ofta angripa ämnet på rätt olika sätt mot vad vi äro vanda vid.

Slutligen finner man annonser från ett flertal amerikan-

ska firmor för undervisningsmateriel. Att dessa också kunna innehålla uppslag att ta vara på, visar vidfogade illustration av en skåptyp, som åtminstone jag aldrig vet mig ha sett förut vare sig i verklighet eller avbildning, men som tycks ha åtskilligt, som talar för sig, särskilt i skolor med starkt begränsat utrymme.

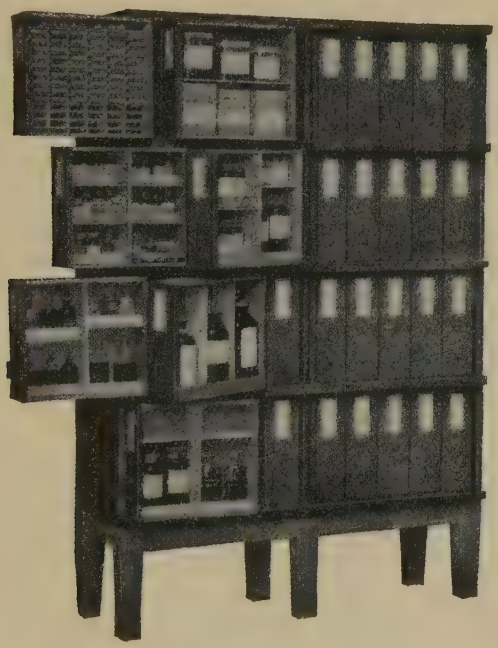


Fig. 1.

En annan annonsart, som förefaller en svensk lärare mycket kuriös, är den, vari agenturer för platsanskaffning åt lärare erbjuda sina tjänster. Eller vad skulle vi säga, om vi en vacker dag i »Tidning för Sveriges läroverk» finge se en annons som följande:

»Pass på! Ni behöver en bättre plats i september. Nu är rätta tiden att handla. Använd den moderna metoden. Vi skola skaffa Eder just en sådan plats som Ni önskar; i annat fall behöver Ni ingenting betala». Etc. etc. En

sådan annons ger en rätt god uppfattning av, under hur olika förhållanden de amerikanska lärarna och vi arbeta. Amerika är ju skolbarnens förlovade land, men lärarna ha nog ej skäl att rosa marknaden.

Tidskriftens kanske största intresse ligger även i övrigt just däri, att den överhuvudtaget ger en inblick i amerikansk undervisning, i den mån denna omfattar här ifrågavarande ämnesgrupp. För den, som önskar få en smula uppfattning härom, men ej han kosta på sig studieresor till ort och ställe, kan »School Science and Mathematics» därför tjänstgöra som ett — visserligen anspråkslöst — surrogat.

Tidskriften, som utkommer med ett c:a 100-sidigt häfte varje månad utom juli, augusti och september, kostar vid prenumeration på posten för närvarande kr. 17: 50 pr år.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Reaktionen mellan koppar och svavel.

Jag brukar varje år vid femte klassens kemiska laborationsövningar låta lärjungarna framställa kopparsulfur genom sammansmältning av koppar och svavel, varvid nästan undantagslöst för små värden på koppar erhållas.

Moll antager i sin bok »Kemiska laborationsövningar för realskolans femte klass» (sid. 6), att orsaken härtill torde vara att söka i en partiell oxidation av kopparsulfuren till sulfat vid för långvarig upphettning i luft. Vid utlakning av en dylik smälta med varmt vatten har jag emellertid i »lösningen» ej kunnat påvisa några kopparjoner ens med ett så känsligt reagens på dylika som ferrocyankalium. Då även vid undvikande av upphettning i luft för små kopparvärden erhållas, torde Molls förklaring ej vara riktig.

Går man till facklitteraturen, finner man, att några amerikanska kemister (E. Posnjak, E. T. Allen och H. E. Mervin[1]) närmare studerat ifrågavarande reaktion, varvid de kommit till det resultatet, att reaktionsprodukten ej utgöres av ren kopparsulfur, utan håller mer svavel än som svarar mot dennas sammansättning. Samtidigt med sulfuren skulle sulfid uppkomma; dessa två svavelföreningar bilda då fasta lösningar med varandra. Detta kanske ger den bästa förklaringen till de höga värden på svavel, som faktiskt erhållas.

Lund 15 okt. 1922. *Knut Parck.*

[1] Chem. Zentralblatt *87*, I, 829 (1916).

Försök över kraftparallellogrammen.

När det gäller försök rörande kraftparallellogrammen, vinkelhävstången, lutande planet etc., användas vanligen för krafternas mätning antingen tyngden av en vikt, upphängd i ena ändan av ett över en trissa löpande snöre, eller ock fjädervågar. I förra fallet uppträder vid trissan alltid någon axelfriktion, och dessutom är det viktigt att inställa trissans plan parallellt med snörets. I senare fallet uppkomma felkällor beroende på att fjädervågen för att visa rätt fordrar vertikal upphängning, då ju såväl fjäderns som den därvid fästade krokens vikt ej kan försummas. Emellertid kan man, såsom framgår av Schreber och Springmanns utmärkta bok Experimentierende Physik, och som för övrigt visades vid laborationskurserna i fysik för elementarlärare i Uppsala 1906 och 1911, lätt övervinna alla nu nämnda svårigheter genom att använda lätta, relativt hårt spända stålfjädrar. Följande rader, tillkomna på redaktionens uppmaning, avse att visa huru ett dylikt försök utföres med fjädrar, som med lätthet kunna tillverkas av vem som helst.

Till varje stålfjäder åtgår ungefär $1\frac{1}{2}$ m 0,4 à 0,5 mm tjock pianotråd. Ett mindre amerikanskt borr[1] med kugghjulsutväxling fästes stadigt i horisontellt läge vid ett vanligt järnstativ med drivhjulet i vertikalt läge. Stativet självt fastgöres med en skruvtving vid bordskanten. Den metallsprint, på vilken spiralen skall lindas, cirka 4 à 5 mm i tjocklek, inköres mellan backarna till borrchucken, och vid sidan av sprinten inskjutes även ena ändan av pianotråden. Därpå vikes tråden i rät vinkel mot metallsprinten, varefter man med vänster hands tumme och pekfinger håller tråden hårt tryckt intill denna. Under det att nu drivhjulet kringvrides med höger hand, lindar tråden upp sig i spiraler, allt medan man genom tryck med pekfinger och tumme sörjer för att varven ligga tätt intill varandra. När den önskade längden, cirka 4 cm, erhållits, släppes veven

[1] Med litet händighet kan även en vanlig borrsväng användas.

av *höger* hand, varvid den torsion i spiralen, som hela tiden varit rådande, utlöser sig, och fjädern kan utan vidare frigöras. De raka ändarna av tråden böjas med en smal flacktång så, att de ligga i fjäderns längdriktning, och vikas längst ut till krokar.

Demonstrationen av kraftparallellogrammen utföres på följande sätt:

Över ett ritbräde fästes med häftstift ett vanligt, större vitt papper. Den punkt, i vilken de tre krafterna skola verka, får utgöras av en liten ring av plåt med ett cirka $1\frac{1}{2}$ mm stort hål. Med denna ring sammanbindas fjädrarnas ena ändar medelst trådar. Alla tre fjädrarna sträckas därpå, och deras andra ändar fastgöras vid papperet med knappnålar (stålnålar med glashuvud). Härefter tillses att den lilla ringens jämviktsläge åter erhålles, då man för den åt sidan och sedan släpper densamma. Då hålet är mycket litet, kan krafternas anbringningspunkt anses ligga i dess medelpunkt, som därför utmärkes med en nål. Spänningen i fjädrarna bestämmes genom uppmätning av deras längder. För den skull klippas millimeterbreda pappersremsor, i ena ändan försedda med en hake i form av ett T. Dessa remsor instickas i fjädrarna, till dess haken tar emot. Med en liten nål eller blyertsspets göres ett märke på remsorna vid andra ändan av spiralen. På haken till varje remsa sättes ett nummer, som ock skrives på papperet vid tillhörande fjäder. Nu lösgöres knappnålen i mitten och därefter en och en i tur och ordning av de andra tre. Fjädern upphänges i ena kroken vid den något utskjutande axeln fäst under belastningsplattan till en brevvåg, graderad till 250 à 500 gr, med remsan kvarhängande i sin hake. Vid andra kroken knytes en tråd, som i vertikalt läge längre ned lägges om en horisontell stav i ett järnstativ eller dylikt. I andra ändan av tråden drar man nu, till dess fjädern uttänjts till det lilla märket på remsan. Friktionen mot den horisontella staven gör det synnerligen lätt att kvarhålla detta läge, medan den spänning, för vilken fjädern var utsatt vid försöket, avläses på vågen. Naturligtvis kan spän-

ningen ock bestämmas genom att den i ett stativ upphängda fjädern belastas med en liten vågskål och nödiga vikter, men detta sätt tar längre tid. Krafternas riktningslinjer kan man draga noggrannast, genom att knappnålarna åter insättas i sina gamla, märkta hål, och linjalen lägges an mot dem. Användas vid ritningen skarpspetsade, hårda blyertspennor, uppgår felet i resultantens storlek högst till ett par procent. Riktningsfelet blir ej heller stort. Försöket lämpar sig ur flera synpunkter utmärkt som lärjungelaboration.

Förfaringssättet vid parallella krafters sammansättning, vinkelhävstången etc. inses utan svårighet. Man kan därvid lämpligen använda en linjal som kan vrida sig kring en axel genom sin tyngdpunkt. Friktionen kan göras mycket liten, om linjalen vilar på en glaspärla, genom vilken nämnda axel går. Fjädrarna kunna ock med fördel användas vid bromsningsförsök för att utröna en motors verkningsgrad.

T. R.

Matematiska uppgifter.

127) Om en triangel är inskriven i en cirkel, och från en punkt på periferien normaler fällas mot sidorna, så ligga dessas fotpunkter i rät linje. *X.*

128) Lös ekvationerna:

$$\operatorname{tg} mx = \frac{\sin (m+n)x}{\cos (m-n)x}$$

och

$$\operatorname{tg} mx = \frac{\cos (m+n)x}{\sin (m-n)x}.$$

Mebius.

129) Som bekant har den spetsiga vinkeln mellan två supplementarkordor i en given ellips ett visst minimivärde α. Är det möjligt att från ändpunkterna av en godtycklig diameter i ellipsen draga två kordor, som bilda vilken vinkel som helst mellan $\frac{\pi}{2}$ och α?

M—r.

130) I en cirkel delar tangentkordan till en punkt P samt punkten P harmoniskt varje korda som går genom P. *X.*

131) Bevisa att $\lim_{n=\infty} \frac{n^2}{1^2+2^2+\ldots+n^2}=0$, utan att summera serien. *O. G—r.*

132) Om jorden antages sfärisk med radien 1, och två meridianer dragas, som på två parallellcirklar, vilkas latituder skilja sig på 60°, avskära bågarna $a=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ och $b=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$, så frågas efter dessa latituder och longitud skillnaden mellan meridianerna.

Lösningar till uppg. i häft. 4. 1921—22.

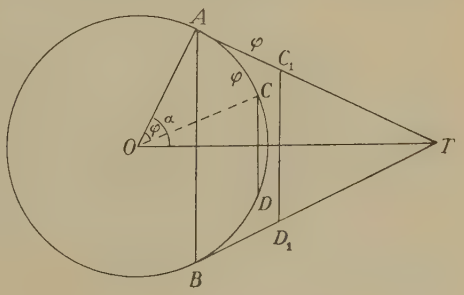
115) *Bevisa att* $8 \cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = 1$, *då* $\alpha = 20°$.

Sättes uttrycket $= x$, så kan man skriva

$$x = 8 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} \cdot \frac{\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin 8\alpha}{2\sin 4\alpha} = \frac{\sin 8\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin 160°}{\sin 20°} = 1.$$

Löst av »*Iter*», *X.*, *-quis-* och *C. A. L.*

116) *Till en cirkel O äro dragna två tangenter TA och TB, som tangera i A och B. På den mindre bågen AB tages en punkt C* ($\frown AC < \frac{1}{2} \frown AB$), *och på AT avsättes stycket* AC_1 *lika med bågen AC. Kordan CD drages parallell med AB, och likaledes linjen* C_1D_1, *som skär TB i* D_1. *Visa att* C_1D_1 *är större än CD.*



Sättes radien $= 1$, så inses, att $AC_1 = \varphi$, då φ är $\angle AOC$. Sättes vidare $\angle AOT = \alpha$, så inses lätt att

$C_1D_1 = 2(\operatorname{tg}\alpha - \varphi)\cos\alpha$

och

$CD = 2\sin(\alpha - \varphi)$

Vi få då $y=\frac{C_1D_1-CD}{2}=\sin\alpha-\varphi\cos\alpha-\sin(\alpha-\varphi)$.

Således är $\frac{dy}{d\varphi}=-\cos\alpha+\cos(\alpha-\varphi)>0$ för alla ifrågakommande värden. Då vidare $y=0$ för $\varphi=0$, så inses, att y och således C_1D_1-CD alltid är positiv.

Löst av *X*, «*Iter*» och *C. A. L.*

117) *Om a är ett udda tal, som ej är divisibelt med 3, så kan* a^6 *alltid skrivas som* $72m+1$, *där m är ett helt tal.*

Man kan sätta:

$$a^6-1=(a^3+1)(a^3-1)=$$
$$=(a+1)(a-1)[(a+1)^2-3a][(a-1)^2+3a].$$

Men då av de tre på varandra följande talen $a-1$, a, $a+1$ ettdera alltid är divisibelt med 3, så är i detta fall ettdera av $a-1$ och $a+1$ divisibelt med 3. Då vidare av två på varandra följande jämna tal alltid det ena måste vara divisibelt med 4, så är produkten av de två första faktorerna divisibel med 8 och även med 3, således med 24. Men då antingen $a+1$ eller $a-1$ är divisibelt med 3, så måste endera av de två sista faktorerna vara divisibel med 3, således hela uttrycket med 72.

Löst av X. och »*Iter*».

Ett annat bevis, lämnat av »Iter», är följande: Då a varken är divisibelt med 2 eller 3, så kan det ej vara $=6n$, $6n\pm2$ eller $6n+3$ och måste sålunda kunna sättas $=6n\pm1$. Utvecklas då enligt binomialteoremet, så fås

$$(6n\pm1)^6-1=(6n)^6\pm6\cdot(6n)^5+15\cdot(6n)^4\pm20\cdot(6n)^3+$$
$$+15\cdot(6n)^2\pm6\cdot(6n)=$$
$$=36n(6^4\cdot n^5\pm6^4n^4+15\cdot6^2n^3\pm20\cdot6n^2+15n\pm1).$$

Om nu n är ett jämnt tal, så är faktorn utanför parentesen divisibel med 72; om däremot n är udda, så innehåller parentesen två udda termer, och är således jämn. Talet således divisibelt med 72.

»Iter» har även givit bevis för två närsläktade satser, nämligen

Om $a \pm 1 \equiv 0 \pmod{2^k}$, *så är* $a^6 \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$, och
Om $a \pm 1 \equiv 0 \pmod{3^k}$, *så är* $a^6 \equiv 1 \pmod{3^{k+1}}$.

1) Sätt $a = m \cdot 2^k \mp 1$, så är

$$a^2 = m^2 \cdot 2^{2k} \mp 2m \cdot 2^k + 1 = 2^{k+1}(m^2 \cdot 2^{k-1} \mp m) + 1 =$$
$$= p \cdot 2^{k+1} + 1.$$

Sål. $a^6 = p^3 \cdot 2^{3k+3} + 3p^2 \cdot 2^{2k+2} + 3p2^{k+1} + 1 =$
$$= 2^{k+1}(p^3 \cdot 2^{2k+2} + 3p^2 \cdot 2^{k+1} + 3p) + 1 = q \cdot 2^{k+1} + 1.$$

2) Sätt $a = m \cdot 3^k \mp 1$, så är

$$a^3 = m^3 \cdot 3^{3k} \mp 3m^2 \cdot 3^{2k} + 3m \cdot 3^k \mp 1 =$$
$$= 3^{k+1}(m^3 \cdot 3^{2k-1} \mp m^2 \cdot 3^{k-1} + m) \mp 1 = p \cdot 3^{k+1} \mp 1.$$

Sål. $a^6 = p^2 \cdot 3^{2k+2} \mp 2 \cdot p \cdot 3^{k+1} + 1 = 3^{k+1}(p^2 \cdot 3^{k+1} \mp 2p) + 1 =$
$$= q \cdot 3^{k+1} + 1.$$

Exempel:

1) $7 + 1 \equiv 0 \pmod{2^3}$ och $7 - 1 \equiv 0 \pmod{3^1}$. Då är $7^6 \equiv 1 \pmod{2^4 \cdot 3^2}$.
Prövning: $117\,649 = 817 \cdot 144 + 1$.

2) $17 - 1 \equiv 0 \pmod{2^4}$ och $17 + 1 \equiv 0 \pmod{3^2}$. Då är $17^6 \equiv 1 \pmod{2^5 \cdot 3^3}$.
Prövning: $24\,137\,569 = 27\,937 \cdot 864 + 1$.

118) *Tre strålar i planet OA, OB och OC äro sådana att vinklarna mellan dem alla äro trubbiga. Sök triangeln ABC sådan, att dessa strålar äro dess bissektriser.*

Lösning. Tag på en av de givna strålarna, låt vara OA, en godtycklig punkt A, och låt den mot OA vinkelräta linjen genom A skära OB och OC (på deras förlängningar över O) i punkterna B' och C' respektive. Drag $B'C \perp OC$ och utdrag $B'C$, tills den skär OA (på förlängningen över O) i en punkt A'. Drag $A'C'$, som skär OB i B. Då äro $A'A$, $B'B$, $C'C$ höjder i triangeln $A'B'C'$ och sålunda, enligt en bekant sats, bissektriser i triangeln ABC[1]. Denna sistnämnda triangel är således en lösning. Detsamma gäller för alla med

[1] Se t. ex. Jochnick, Geometriska teoremer och konstruktionsproblemer, Sthlm 1874, sid. 17, sats 27.

nämnda triangel likformiga och likbelägna trianglar med O till likformighetspunkt.

Avsätter man på strålarnas förlängningar bakåt, över O, styckena $OA_1 = OA$, $OB_1 = OB$, $OC_1 = OC$, erhålles en med ABC kongruent triangel $A_1B_1C_1$, vars sidor äro parallella med homologa sidor hos den förra. Triangeln $A_1B_1C_1$ är sålunda även en lösning, blott med den skillnaden, att triangelns spetsar ligga på strålarnas förlängningar över O i stället för på strålarna själva. Detsamma gäller tydligen för alla med $A_1B_1C_1$ likformiga och likbelägna trianglar med O till likformighetspunkt.

Till denna senare lösning kommer man naturligtvis direkt, om den först angivna konstruktionen utföres med utgångspunkt från en punkt A_1 på strålens OA förlängning bakåt, över O, i stället för på strålen OA själv.

Annan lösning. Tydligt är, att varje konstruktion, som ger en triangel med de givna strålarna till höjder, löser uppgiften. I stället för den ovan angivna konstruktionen kan man sålunda även betjäna sig av följande:

Tag en punkt A' på den ena strålens, låt vara OA, förlängning bakåt, över O, drag $A'B \perp OB$, $A'C \perp OC$ och utdrag $A'B$ och $A'C$, tills de skära förlängningarna av OC och OB, över O, i C' och B' resp. Låt $B'C'$ skära OA i A. Då äro $A'A$, $B'B$, $C'C$ höjder i triangeln $A'B'C'$ och sålunda bissektriser i triangeln ABC.

Tages punkten A' på strålen OA själv i stället för på dess förlängning bakåt, över O, erhålles genom fullkomligt likartad konstruktion en annan lösning, blott med den skillnaden, att triangelns spetsar komma att ligga på strålarnas förlängningar över O i stället för på strålarna själva.

Anm. 1. Om en av vinklarna mellan strålarna är spetsig (två av vinklarna kunna alltid betraktas såsom trubbiga), kan man på samma sätt upprita en triangel ABC sådan, att en av strålarna är inre bissektris och de båda andra yttre bissektriser i triangeln. Med denna utvidgning av uppgiften är denna i allmänhet möjlig; för erhållande av egent-

liga trianglar fordras endast, att strålarna äro skilda och icke innehålla något rätvinkelpar.

Anm. 2. Den sats, på vilken uppgiftens lösning är baserad, nämligen att höjderna i en triangel, vilken som helst, utgöra bissektriser i fotpunktstriangeln, äger giltighet även på sfären[1]; och man kan sålunda på fullkomligt likartat sätt upprita ∞' sfäriska trianglar, vilkas bissektriser utgöras av tre genom en och samma punkt gående storcirkelbågar.

»*Iter.*»

Även löst av *X.* och *-quis-*.

119) *Två plana figurer A och B hava lika ytor, och förhållandet mellan deras omkretsar är p. Två med dem resp. likformiga figurer A_1 och B_1 hava lika omkretsar, och förhållandet mellan deras ytor är q. Visa att $p^2q=1$.*

Antag att A har ytan Y och omkretsen po

Då har B » » Y » » o

Vidare att A_1 » » m^2Y » » mpo

och B_1 » » n^2Y » » no.

Enligt problemets uppgifter är då:

$$\begin{cases} mpo=no \\ m^2Y=qn^2Y \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} mp=n \\ m^2=qn^2 \end{cases}, \text{ varav } p^2q=1.$$

Löst av *X.*, *-quis-* och »*Iter*».

120. *En bägare innehåller n kulor, obekant hur många av dem äro vita. Man drager en av dem, och den befinnes vara vit. Hur stor är sannolikheten för att de alla äro vita?*

Man tänker sig n st. lika bägare, innehållande resp. $1, 2 \ldots n$ vita kulor och resp. $n-1, n-2 \ldots 0$ färgade. Om man då på måfå väljer en bägare och likaledes på

[1] Tänker man sig nämligen sidorna och höjderna i en sfärisk triangel projicierade genom en centralprojektion från sfärens medelpunkt på ett plan, som tangerar sfären i höjdernas skärningspunkt, så komma dessa projektioner att utgöra sidor och höjder i en plan triangel. Likaledes kommer projektionen av den sfäriska triangelns fotpunktstriangel att utgöra fotpunktstriangel i den plana triangeln. Då nu höjderna i den plana triangeln utgöra bissektriser i dennas fotpunktstriangel, måste de fotpunktstriangeln projicierande planen ligga parvis symmetriskt i avseende på det plan, som projicierar motsvarande höjd, och satsen måste sålunda äga giltighet även för den sfäriska triangeln.

Satsen finnes angiven utan bevis i »Nyt Tidsskrift for Matematik», 29 Aarg., sid. 23, uppgift 571.

måfå drager ut en kula ur denna, så kan man få upp en vit kula på $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ olika sätt, vilka äro lika sannolika. Däremot kan bägaren väljas blott på n sätt. Sannolikheten för att jag just valt den sista bägaren är därför

$$n : \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2}{n+1},$$

vilket därför är den sökta sannolikheten.

Löst av *X*, »*Iter*» och *C. A. L.*

Brevlåda.

Signaturen B. Z—r torde godhetsfullt insända namn och adress till Red., i och för korrespondens angående den av honom insända uppsatsen.

Några trigonometriska summationsformler.

Av C. A. MEBIUS.

§ 1. Om man sätter

$$z = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

så är $z^{-1} = \cos\alpha - i\sin\alpha$

och enligt *Moivres* teorem

$$z^m = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha$$

samt $z^{-m} = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha - i\sin m\alpha.$

Således är

$$2\cos m\alpha = z^m + z^{-m} \quad \ldots\ldots (1)$$

och $$2i\sin m\alpha = z^m - z^{-m}. \quad \ldots\ldots (2)$$

Multipliceras båda leden i ekvationen (1) med h^m, där h är ett tal vilket som helst, så fås

$$2h^m\cos m\alpha = h^m z^m + h^m z^{-m}. \quad \ldots\ldots (3)$$

Låta vi här m efter vartannat antaga värdena

$$0;\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$$

och addera de uppkomna ekvationerna led för led, fås

$$2\{1 + h\cos\alpha + h^2\cos 2\alpha + \ldots + h^{n-1}\cos(n-1)\alpha\} =$$
$$= 1 + hz + h^2z^2 + \ldots + h^{n-1}z^{n-1} + 1 + hz^{-1} + h^2z^{-2} +$$
$$+ \ldots + h^{n-1}\cdot z^{-(n-1)}. \quad \ldots\ldots (4)$$

Högra membrum utgöres av två geometriska serier och har därför värdet

$$\frac{h^n z^n - 1}{hz - 1} + \frac{h^n z^{-n} - 1}{hz^{-1} - 1} =$$
$$= \frac{h^{n+1}(z^{n-1} + z^{-(n-1)}) - h^n(z^n + z^{-n}) - h(z + z^{-1}) + 2}{h^2 - h(z + z^{-1}) + 1},$$

vilket med användning av ekv. (1) antager formen

$$\frac{h^{n+1} \cdot 2\cos(n-1)\alpha - h^n \cdot 2 \cdot \cos n\alpha - h \cdot 2\cos\alpha + 2}{h^2 - 2h\cos\alpha + 1}.$$

Alltså är

$$1 + h\cos\alpha + h^2\cos 2\alpha + \ldots + h^{n-1} \cdot \cos(n-1)\alpha = \\ = \frac{h^{n+1}\cos(n-1)\alpha - h^n \cos n\alpha - h\cos\alpha + 1}{h^2 - 2h\cos\alpha + 1} \quad . \quad . \quad (5)$$

På samma sätt erhålles med användning av ekv. (2)

$$h\sin\alpha + h^2\sin 2\alpha + \ldots + h^{n-1}\sin(n-1)\alpha = \\ = \frac{h^{n+1}\sin(n-1)\alpha - h^n \sin n\alpha + h\sin\alpha}{h^2 - 2h\cos\alpha + 1}, \quad . \quad . \quad (6)$$

(varest faktorn h kan bortdivideras).

§ 2. Ur dessa båda formler kunna erhållas flera intressanta bekanta specialfall. Sättes $h = 1$, fås

$$1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(n-1)\alpha = \\ = [\cos(n-1)\alpha - \cos n\alpha - \cos\alpha + 1] : 2(1 - \cos\alpha) \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin(n-1)\alpha = \\ = [\sin(n-1)\alpha - \sin n\alpha + \sin\alpha \quad] : 2(1 - \cos\alpha) \quad . \quad . \quad (8)$$

De högra leden kunna något förenklas.

För $h = -1$ erhålles

$$1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha - \ldots + (-1)^{n-1}\cos(n-1)\alpha = \\ = [(-1)^{n+1}\cos(n-1)\alpha - (-1)^n \cos n\alpha + \cos\alpha + 1] : \\ 2(1 + \cos\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\sin\alpha - \sin 2\alpha + \ldots + (-1)^n \sin(n-1)\alpha = \\ = [(-1)^n \sin(n-1)\alpha + (-1)^n \sin n\alpha + \sin\alpha] : \\ 2(1 + \cos\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

§ 3. Antager man $-1 < h < +1$ och utsträcker serierna i (5) och (6) i oändlighet, så närma sig summorna bestämda gränsvärden. För $n = \infty$ fås sålunda

$$1 + h\cos\alpha + h^2\cos 2\alpha + h^3\cos 3\alpha + \ldots \text{ i } \infty = \\ = \frac{1 - h\cos\alpha}{h^2 - 2h\cos\alpha + 1}, \quad [h^2 < 1] \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

och $$\sin\alpha + h\sin 2\alpha + h^2\sin 3\alpha + \text{i}\,\infty = \frac{\sin\alpha}{h^2 - 2h\cos\alpha + 1}; \quad [h^2 < 1] \quad . \quad . \quad (12)$$

Som ett specialfall härav antaga vi $h = \cos\alpha$ och få då, under villkor att $\cos^2\alpha < 1$,

$$1 + \cos\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha\cdot\cos 2\alpha + \cos^3\alpha\cdot\cos 3\alpha + \ldots \text{i}\,\infty = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha\cdot\sin 2\alpha + \cos^2\alpha\cdot\sin 3\alpha + \ldots \text{i}\,\infty = \frac{1}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

För $h = \sin\alpha$ med villkoret $\sin^2\alpha < 1$ fås

$$1 + \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos 2\alpha + \sin^3\alpha\cdot\cos 3\alpha + \ldots = \frac{1 - \sin\alpha\cos\alpha}{1 - \sin 2\alpha + \sin^2\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

och $$\sin\alpha + \sin\alpha\cdot\sin 2\alpha + \sin^2\alpha\sin 3\alpha + \ldots = \frac{\sin\alpha}{1 - \sin 2\alpha + \sin^2\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

För $h = \operatorname{tg}\alpha$ erhålles, om $\operatorname{tg}^2\alpha < 1$,

$$1 + \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cdot\cos 2\alpha + \operatorname{tg}^3\alpha\cos 3\alpha + \ldots = \frac{\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha}{1 - \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

och $$\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha\cdot\sin 2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\sin 3\alpha + \ldots = \frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1 - \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

För $h = \operatorname{cot}\alpha$ erhålles, då $\operatorname{cot}^2\alpha < 1$,

$$1 + \operatorname{cot}\alpha\cos\alpha + \operatorname{cot}^2\alpha\cos 2\alpha + \operatorname{cot}^3\alpha\cos 3\alpha + \ldots = \frac{\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha}{1 - \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

och $$\sin\alpha + \operatorname{cot}\alpha\sin 2\alpha + \operatorname{cot}^2\alpha\sin 3\alpha + \ldots = \frac{\sin^3\alpha}{1 - \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Analoga serier med växlande tecken för varannan term erhållas, om man sätter $h = -\cos\alpha$ etc.

§ 4. Ekvationerna (5) och (6) äro rena identiteter. Om man deriverar (eller integrerar) dem en eller flera gånger, får man åtskilliga mer eller mindre komplicerade serieutvecklingar, vilkas summa kan exakt angivas. Som exempel härpå deriveras ekv. (5) en gång i avseende på h. Därvid erhålles

$$\left.\begin{aligned}&\cos\alpha + 2h\cos 2\alpha + \ldots + (n-1)h^{n-2}\cos(n-1)\alpha = \\ &= \{(n-1)h^n(h^2\cos(n-1)\alpha - 2h\cos n\alpha + \cos(n+1)\alpha) - \\ &- nh^{n-1}(h^2\cos(n-2)\alpha - 2h\cos(n-1)\alpha + \cos n\alpha) + \\ &+ h^2\cos\alpha - 2h + \cos\alpha\} : (h^2 - 2h\cos\alpha + 1)^2 \ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

För $h = 1$ övergår denna likhet till

$$\left.\begin{aligned}&\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + 3\cos 3\alpha + \ldots + (n-1)\cos(n-1)\alpha = \\ &= [(n-1)\cos(n+1)\alpha - (3n-2)\cos n\alpha + \\ &+ (3n-1)\cos(n-1)\alpha - n\cos(n-2)\alpha + \\ &+ 2\cos\alpha - 2] : 4(1-\cos\alpha)^2 \ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Summorna få i allmänhet en så komplicerad form, att de ej erbjuda särskilt intresse.

Som exempel på huru en serie erhålles genom integration välja vi att utgå från ekv. (12). Vi multiplicera med $-2hd\alpha$ och integrera. Då är

$$-2h\int[\sin\alpha + h\sin 2\alpha + h^2\sin 3\alpha + \ldots]\,d\alpha =$$
$$= -\int\frac{2h\sin\alpha\,d\alpha}{1 - 2h\cos\alpha + h^2}; \quad (h^2 < 1).$$

Således

$$h\cos\alpha + \frac{h^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{h^3}{3}\cos 3\alpha + \ldots =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\log_e(1 - 2h\cos\alpha + h^2) \quad \ldots \quad (23)$$

Integrationskonstanten är noll, emedan man för $\alpha = 2k\pi$ erhåller den bekanta likheten

$$h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \ldots = -\log_e(1-h).$$

§ 5. Att man i § 1 kunde erhålla ett uttryck med få termer (4 resp. 3) för summorna i ekv. (5) och (6) i stället för ett antal vilket som helst (n och $n-1$ termer), berodde därpå, att man i utvecklingen (ekv. 4) erhöll två geometriska serier. Exponenterna i dessa geometriska serier bildade den aritmetiska serien 0, 1, 2, 3 . . . $(n-1)$. Det är tydligt, att man kan få allmännare serier summerade, om man låter exponenterna bilda en allmän aritmetisk serie.

Vi sätta således i ekv. (3)

$$2h^m \cos m\alpha = h^m z^m + h^m z^{-m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

efter vartannat

$$m = a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots\ a+(n-1)d,$$

där a och d äro tal vilka som helst, och addera de uppkomna ekvationerna led för led. Då erhålles

$$\begin{aligned} 2h^a \cos a\alpha + 2h^{a+d} \cos(a+d)\alpha + \ldots + 2h^{a+(n-1)d} \cos(a+ \\ +(n-1)d)\,\alpha = \\ h^a z^a + h^{a+d} \cdot z^{a+d} + \ldots + h^{a+(n-1)d} \cdot z^{a+(n-1)d} \\ + h^a z^{-a} + h^{a+d} \cdot z^{-(a+d)} + \ldots + h^{a+(n-1)d} \cdot z^{-(a+(n-1)d)} \end{aligned}$$

och efter en räkning alldeles analog med den, som utförts i § 1,

$$\left.\begin{aligned} \cos a\alpha + h^d \cos(a+d)\alpha + h^{2d} \cos(a+2d)\alpha + \ldots + \\ + h^{(n-1)d} \cos(a+(n-1)d)\,\alpha = \\ = [h^{(n+1)d} \cdot \cos(a+(n-1)d)\,\alpha - h^{nd} \cos(a+nd)\,\alpha - \\ - h^d \cos(a-d)\,\alpha + \cos a\alpha] : [h^{2d} - 2h^d \cos d\alpha + 1] \ldots \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

På samma sätt erhålles ur ekv. (2)

$$2i\, h^m \sin m\alpha = h^m z^m - h^m z^{-m}$$

och av denna

$$\left.\begin{aligned} \sin a\alpha + h^d \sin(a+d)\alpha + h^{2d} \sin(a+2d)\alpha + \ldots + \\ + h^{(n-1)d} \sin(a+(n-1)d)\,\alpha = \\ = [h^{(n+1)d} \cdot \sin(a+(n-1)d)\,\alpha - h^{nd} \sin(a+nd)\,\alpha - \\ - h^d \sin(a-d)\,\alpha + \sin a\alpha] : [h^{2d} - 2h^d \cos d\alpha + 1] \ldots \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

§ 6. Ur de båda ekvationerna (24) och (25) må anföras följande specialfall.

Antages $a = 0$, $d = 2$, $h = 1$, fås ur (24)

$$1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \ldots + \cos (n-1)2\alpha = \\ = \frac{\cos (n-1)2\alpha - \cos n \cdot 2\alpha - \cos 2\alpha + 1}{2(1 - \cos 2\alpha)}, \quad \ldots \quad (26)$$

vilken formel sammanfaller med (7), om man där sätter 2α i stället för α.

Sätter man $a = 1$, $d = 2$, $h = 1$, fås ur (24)

$$\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos (2n-1)\alpha = \\ = \frac{\cos (2n-1)\alpha - \cos (2n+1)\alpha}{2(1 - \cos 2\alpha)} = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha} \quad \ldots \quad (27)$$

och ur (25)

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin (2n-1)\alpha = \\ = \frac{\sin (2n-1)\alpha - \sin (2n+1)\alpha + 2 \sin \alpha}{2(1 - \cos 2\alpha)}. \quad \ldots \quad (28)$$

Är $h = -1$ och d ett udda tal hava termerna växlande tecken. En mångfald av serier erhållas för de olika kombinationerna av a, d och h.

§ 7. Antager man absoluta beloppet för h d. v. s. $|h| < 1$, så bliva summorna (24) och (25) ändliga, även då antalet termer i serierna blir oändligt. Man får därför, när $n = \infty$,

$$\cos a\alpha + h^d \cos (a+d)\alpha + h^{2d} \cos (a+2d)\alpha + \ldots \text{ i } \infty = \\ = \frac{\cos a\alpha - h^d \cos (a-d)\alpha}{h^{2d} - 2h^d \cos d\alpha + 1} \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

och

$$\sin a\alpha + h^d \sin (a+d)\alpha + h^{2d} \sin (a+2d)\alpha + \ldots \text{ i } \infty = \\ = \frac{\sin a\alpha - h^d \sin (a-d)\alpha}{h^2 - 2h \cos d\alpha + 1} \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

För $h = \cos \alpha$, $a = 1$, $d = 2$, fås under villkoret $\cos^2 \alpha < 1$, sedan faktorn $\cos \alpha$ bortdividerats,

$$1 + \cos \alpha \cdot \cos 3\alpha + \cos^3 \alpha \cdot \cos 5\alpha + \ldots = \\ = \frac{1}{1 + 3 \cos^2 \alpha} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

och för $a = 1 \quad d = 2 \quad h^2 = -\sin^2\alpha$, $\sin^2\alpha < 1$ efter bortdividering av $\sin\alpha$

$$1 - \sin\alpha \cdot \sin 3\alpha + \sin^3\alpha \cdot \sin 5\alpha - \sin^5\alpha \cdot \sin 7\alpha + \ldots = \frac{1}{1 + 3\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

§ 8. I de föregående allmänna fallen ha de trigonometriska serierna fortskridit med termer av formen $h^{nd}\cos(a + nd)\alpha$ och $h^{nd}\sin(a + nd)\alpha$, där således cosinus och sinus förekomma i första digniteten. Den här använda metoden kan emellertid lätt utvidgas, så att man erhåller serier, där nämnda tal förekomma i kvadrat eller högre digniteter vilka som helst. Vi utgingo i § 1 från de båda ekvationerna (1) och (2)

$$2\cos m\alpha = z^m + z^{-m} \quad \text{och} \quad 2i\sin m\alpha = z^m - z^{-m}.$$

Genom kvadrering erhålles ur dessa

$$4\cos^2 m\alpha = z^{2m} + z^{-2m} + 2 \quad \ldots \quad (33\,a)$$

och

$$-4\sin^2 m\alpha = z^{2m} + z^{-2m} - 2 \quad \ldots \quad (33\,b)$$

Multipliceras båda leden med h^m, så fås ur (33 a)

$$4h^m\cos^2 m\alpha = h^m z^{2m} + h^m z^{-2m} + 2h^m. \quad \ldots \quad (34)$$

Låta vi här m efter vartannat antaga värdena

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \ldots \quad a + (n-1)d$$

och addera de uppkomna ekvationerna led för led, så fås

$$4h^a[\cos^2 a\alpha + h^d\cos^2(a+d)\alpha + h^{2d}\cos^2(a+2d)\alpha + \ldots + h^{(n-1)d}\cos^2(a+(n-1)d)\alpha] =$$
$$= (hz^2)^a + (hz^2)^{a+d} + \ldots + (hz^2)^{a+(n-1)d} + (hz^{-2})^a + (hz^{-2})^{a+d} + \ldots + (hz^{-2})^{a+(n-1)d} + 2(h^a + h^{a+d} + \ldots + h^{a+(n-1)d}).$$

Högra membrum utgöres här av tre geometriska serier. Efter en räkning alldeles analog med den, som utförts i § 1, och sedan den gemensamma faktorn $2h^a$ bortdivi-

derats, får man

$$2[\cos^2 a\alpha + h^d \cos^2(a+d)\alpha + \ldots + h^{(n-1)d}\cos^2(a+(n-1)d)\alpha] =$$
$$= \frac{h^{(n+1)d}\cdot\cos(a+(n-1)d)2\alpha - h^{nd}\cos(a+nd)2\alpha - h^d\cos(a-d)2\alpha + \cos a\cdot 2\alpha}{h^{2d} - 2h^d\cdot\cos d\cdot 2\alpha + 1}$$
$$+ \frac{h^{nd}-1}{h^d-1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

På samma sätt erhålles ur ekv. (33 b)

$$-2[\sin^2 a\alpha + h^d \sin^2(a+d)\alpha + \ldots + h^{(n-1)d}\sin^2(a+(n-1)d)\alpha] =$$
$$= \frac{h^{(n+1)d}\cos(a+(n-1)d)2\alpha - h^d\cos(a+nd)2\alpha - h^d\cos(a-d)2\alpha + \cos a\cdot 2\alpha}{h^{2d} - 2h^d\cos d\cdot 2\alpha + 1}$$
$$- \frac{h^{nd}-1}{h^d-1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Riktigheten av de båda ekvationerna kan även kontrolleras på så sätt, att man i vänstra membra tillämpar formlerna $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$ och $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$. De av cos och sin oberoende termerna i de båda leden äro lika och de övriga lika enligt ekv. (24).

I det speciella fall då $a = 0$, $d = 1$ och $h = 1$ får man ur (35)

$$2[1 + \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2(n-1)\alpha] =$$
$$= n + \frac{\cos(n-1)2\alpha - \cos n\cdot 2\alpha - \cos 2\alpha + 1}{2(1-\cos 2\alpha)} =$$
$$= n + \tfrac{1}{2} + \frac{\sin(2n-1)\alpha}{2\sin\alpha}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

och ur (36)

$$2[\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2(n-1)\alpha] =$$
$$= n - \tfrac{1}{2} - \frac{\sin(2n-1)\alpha}{2\sin\alpha}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Låter man termernas antal växa i oändlighet, så bliva serierna i vänstra membra divergenta, vilket framgår av termen n i högra membra. Uppkomsten av de båda termerna n och $\frac{1}{2} + \frac{\sin(2n-1)\alpha}{2\sin\alpha}$ framgår av det, som anmärkts efter ekv. (36).

§ 9. Vill man erhålla serier, som fortskrida efter tredje digniteterna av $\cos(a+nd)\alpha$ och $\sin(a+nd)\alpha$, så utgår man från

$$8\cos^3 m\alpha = (z^m + z^{-m})^3 = z^{3m} + z^{-3m} + 3(z^m + z^{-m})$$

och $$-8i\sin^3 m\alpha = (z^m - z^{-m})^3 = z^{3m} - z^{-3m} - 3(z^m - z^{-m}),$$

sätter m successivt lika med a, $a+d$, . . . $a+(n-1)d$, och adderar de så uppkomna ekvationerna led för led; på högra membra tillämpas därpå ekvationerna (1) och (2).

Om man slutligen utgår från

$$2^p\cos^p m\alpha = (z^m + z^{-m})^p =$$
$$= z^{pm} + z^{-pm} + p(z^{(p-2)m} + z^{-(p-2)m}) + \text{o. s. v.}$$

och $$(2i)^p\sin^p m\alpha = (z^m - z^{-m})^p,$$

så kan man bilda serier, som fortskrida efter p:te digniteten av cosinus och sinus och beräkna summorna av n termer i desamma.

§ 10. I de hittills behandlade serierna har man åstadkommit summationen med tillhjälp av den geometriska serien. Det är emellertid tydligt, att man kan använda andra serier, om man blott känner deras summa. Låt oss därför utgå från potensserien

$$f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots = \sum_0^\infty a_n\zeta^n, \quad (39)$$

där koefficienten a_n är en funktion av termens ordningsnummer n och dessutom kan innehålla α, h eller andra parametrar.

Då är också

$$f(\zeta^{-1}) = a_0 + a_1\zeta^{-1} + \ldots + a\ \zeta^{-n} + \ldots = \sum_0^\infty a_n\zeta^{-n}, \quad (40)$$

och vi antaga, att dessa båda potensserier hava ett gemensamt konvergensområde. Vi ersätta nu ζ med $z=\cos\alpha + i\sin\alpha$ och erhålla då genom addition och subtraktion

$$\frac{f(z)+f(z^{-1})}{2} = \sum_0^\infty a_n\frac{z^n+z^{-n}}{2} = \sum_0^\infty a_n\cos n\alpha \quad \ldots (41)$$

samt $$\frac{f(z)-f(z^{-1})}{2i} = \sum_1^\infty a_n\frac{z^n-z^{-n}}{2i} = \sum_1^\infty a_n\sin n\alpha \ldots (42)$$

Vi skilja nu på de reella och imaginära delarna av $f(z)$ och antaga

$$f(z) = X + iY; \quad \ldots \ldots \quad (43\,a)$$

då är också $f(z^{-1}) = X - iY \quad \ldots \ldots \quad (43\,b)$

och således

$$\sum_0^\infty a_n \cos n\alpha = X \text{ och } \sum_1^\infty a_n \sin n\alpha = Y. \quad \ldots \quad (44)$$

Exempel. $f(\zeta) = e^\zeta = 1 + \sum_1^\infty \frac{\zeta^n}{\underline{|n}}$; $a = \frac{1}{\underline{|n}}$; $(\underline{|0} = 1)$.

Nu är $f(z) = f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} =$

$$= e^{\cos\alpha}(\cos\sin\alpha + i\sin\sin\alpha),$$

således $X = e^{\cos\alpha} \cdot \cos\sin\alpha$ och $Y = e^{\cos\alpha} \cdot \sin\sin\alpha$,

alltså $1 + \frac{\cos\alpha}{1} + \frac{\cos 2\alpha}{\underline{|2}} + \frac{\cos 3\alpha}{\underline{|3}} + \ldots = e^{\cos\alpha} \cdot \cos\sin\alpha$

och $\frac{\sin\alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{\underline{|2}} + \frac{\sin 3\alpha}{\underline{|3}} + \ldots = e^{\cos\alpha} \cdot \sin\sin\alpha$.

Antaga vi $a_n = \frac{h^n}{\underline{|n}}$,

så fås $f(z) = 1 + \frac{hz}{1} + \frac{h^2z^2}{\underline{|2}} + \ldots = e^{hz} = e^{h\cos\alpha + ih\sin\alpha} =$

$$= e^{h\cos\alpha}(\cos(h\sin\alpha) + i\sin(h\sin\alpha)).$$

Således är

$$X = e^{h\cos\alpha} \cdot \cos(h\sin\alpha) \text{ och } Y = e^{h\cos\alpha} \cdot \sin(h\sin\alpha),$$

alltså

$$1 + h\cos\alpha + \frac{h^2}{\underline{|2}}\cos 2\alpha + \frac{h^3}{\underline{3}}\cos 3\alpha + \ldots = e^{h\cos\alpha} \cdot \cos(h\sin\alpha)$$

och $h\sin\alpha + \frac{h^2}{\underline{|2}}\sin 2\alpha + \frac{h^3}{\underline{|3}}\sin 3\alpha + \ldots = e^{h\cos\alpha} \cdot \sin(h\sin\alpha)$.

Använder man de bekanta utvecklingarna i potensserier av $\sin\zeta$, $\cos\zeta$, $\log(1+\zeta)$, etc., kan man angiva summan av andra trigonometriska serier. Vi äro emellertid därmed inne på området för de allmänna *Fourier*'ska serierna och avsluta därför härmed denna mera elementära framställning.

Användningar av Realgymnasiets kurs i differentialkalkyl.

Av AD. MEYER.

Genom läroverkstadgan av år 1905 infördes, som bekant, en kurs i differentialkalkyl i realgymnasiets två högsta ringar. Kursen var visserligen ytterst liten, och har, att döma av studentproblemen, inom matematiken knappast använts till annat än att söka maxima och minima samt kurvors tangenter.

Även inom fysiken har dess användning varit minimal: i lektor Molls fysik definieras visserligen hastigheten (med fin stil) såsom vägens derivata med avseende å tiden och (i en not) accelerationen såsom hastighetens derivata; men han använder det förra blott på rätlinjig, likformigt accelererad rörelse och det senare ej alls, under det att han vid kroklinjiga rörelser ännu i sista upplagan av sin dynamik använder de gamla metoderna med krypto-differentialkalkyl.

Då det emellertid är av yttersta vikt, att lärjungarna verkligen få tillämpning på vad de läst, så att det ej blir blott en död kunskap, och ej heller differentialkalkylen endast betraktas som en genväg för att finna maxima och minima, så har jag försökt att på dynamiken tillämpa differentialkalkylens elementer på ett sådant sätt att det kan genomgås i 4:e ringen. Jag vill därför här framställa några exempel på differentialkalkylens tillämpning vid kroklinjig rörelse.

Det första, som då måste göras klart för lärjungarna äro formlerna

$$h_x = \frac{dx}{dt}, \qquad h_y = \frac{dy}{dt},$$

$$a_x = \frac{dh_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dh_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

där x, y äro punktens koordinater vid tiden t, h_x och h_y hastighetens komposanter och a_x och a_y accelerationens komposanter utefter axlarna, samt de självklara formlerna

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.^1$$

Jag övergår nu till de särskilda exemplen.

I. *Likformig rörelse i en cirkel.*

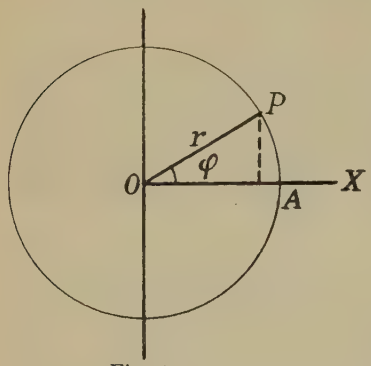


Fig. 1.

Låt O vara cirkelns medelpunkt, r dess radie, A utgångspunkten och P den punkt, där kroppen befinner sig vid tiden t. Tag O till origo och OA till x-axel, så är, om vinkeln AOP kallas φ,

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Deriveras dessa, så fås

$$h_x = \frac{dx}{dt} = -r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$h_y = \frac{dy}{dt} = r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots (2)$$

Härav:

$$\frac{h_y}{h_x} = -\cot\varphi \quad \ldots\ldots (3)$$

och

$$h = \pm r\frac{d\varphi}{dt}, \quad \ldots\ldots (4)$$

där minustecknet strykes, emedan φ växer med t, och h skall vara positiv.

Härav dragas slutsatserna, att hastigheten går vinkelrätt mot radien, således utefter tangenten, och att hastigheten i banan är radien gånger vinkelhastigheten $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$, vilka

[1] Jag använder, för att ej onödigtvis försvåra saken, de beteckningar som finnas i Molls lärobok, ej de internationella.

båda saker vi visste förut, men som det kan vara intressant nog att konstatera på detta sätt. Här kan man även, om man så vill, bevisa, att hastigheten vid *varje* rörelse är riktad utefter banans tangent, ty

$$\frac{h_y}{h_x} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}.$$

Derivera vi nu åter (1) och (2), så fås, emedan $\frac{d\varphi}{dt}$ är konstant,

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -r\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -r\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Således:

$$\frac{a_y}{a_x} = \operatorname{tg}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

och

$$a = r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ur (7) slutes, att accelerationen går rätt utåt från eller inåt mot medelpunkten, och om vi observera, att både a_x och a_y i första kvadranten äro negativa, så inse vi, att det senare måste vara fallet. Ur (8) däremot få vi accelerationens storlek $r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, som enligt (4) ger $a = \frac{h^2}{r}$, vilket sedan ju lätt transformeras till $a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$.

Och kraften fås genom något av dessa uttrycks multiplikation med massan.

Här är att anmärka, att det understundom förvånar lärjungarna, att r ingår i nämnaren i det första uttrycket (således kraften omvänt prop. mot radien), men i täljaren i det andra (således kraften direkt prop. mot radien). Detta förstå alltid de bättre lärjungarna, under det att de sämre ofta betrakta det som en motsägelse, vilken man därför ej bör underlåta att förklara.

II. *Plana pendeln.*

Sedan i Molls fysik den cirkulärt koniska pendeln behandlats, så anmärkes, att enligt erfarenheten den plana pendeln följer samma lagar. Någon matematisk behandling av den samma ger han ej; och dock avger den ett av de bästa exempel till vad lärjungarna lärt sig i differentialkalkylen. Jag plägar behandla den på ungefär följande sätt:

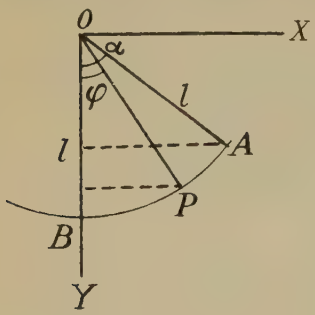


Fig. 2.

Låt pendelns upphängningspunkt O vara origo och positiva y-axeln utefter dess jämnviktsläge OB. Låt OA vara dess utgångsläge, och sätt $\angle BOA = \alpha$. Låt P vara dess läge vid tiden t, och sätt $\angle BOP = \varphi$, pendellängden $OB = l$. Då är

$$\begin{cases} x = l \sin \varphi \\ y = l \cos \varphi \end{cases}$$

således

$$h_x = \frac{dx}{dt} = l \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$h_y = \frac{dy}{dt} = -l \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

således

$$h = \pm l \frac{d\varphi}{dt},$$

men då h skall vara positivt, men $\frac{d\varphi}{dt}$ är negativt, emedan φ avtager med tiden, så måste vi hava

$$h = -l \frac{d\varphi}{dt}.$$

Men enligt levandekraftprincipen (eller lagen för lutande plan) hava vi $h^2 = 2g \times$ lodräta avst. mellan A och P,

således

$$-l \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \alpha)} =$$

$$= \sqrt{2gl \cdot 2 \sin \frac{\alpha + \varphi}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}.$$

Men för små vinklar kunna vi sätta sinus lika med vinkeln (i radianer). Om vi således antaga utslagsvinkeln α, och således även φ, liten, så kunna vi sätta

$$-l\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{gl(\alpha^2-\varphi^2)},$$

eller

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\sqrt{\frac{g}{l}(\alpha^2-\varphi^2)}$$

och således

$$\frac{dt}{d\varphi}=\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}}\right).$$

Men vi känna förut (eller kunna lätt bevisa) att

$$\frac{d}{d\varphi}\arccos\frac{\varphi}{\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}},$$

och få således

$$\frac{dt}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\arccos\frac{\varphi}{\alpha}\right),$$

således

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\arccos\frac{\varphi}{\alpha}+\text{konstant}.$$

Men för $t=0$ måste φ vara $=\alpha$ och således första termen i högra membrum $=0$, således även konstanten $=0$.

Vi få således för små utslagsvinklar

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\arccos\frac{\varphi}{\alpha}.$$

Sättes då $\varphi=0$, d. v. s. då pendeln gjort $^1/_2$ enkel svängning, så fås $\arccos\frac{\varphi}{\alpha}=\frac{\pi}{2}$, och således $t=\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}$, och sättes $\varphi=-\alpha$, d. v. s. då pendeln gjort en hel enkel svängning, så fås $\arccos\frac{\varphi}{\alpha}=\pi$, och vi få tiden för en enkel svängning $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Lätta men trevliga övningsexempel kunna fås genom att begära svängningstiden för en godtycklig del av svängningen

(t. ex. $^1/_3$, $^1/_4$ o. s. v.) då hela svängningstiden är känd, eller då pendelns längd är känd.

III. *Newtons lag ur Kepplers lagar.*

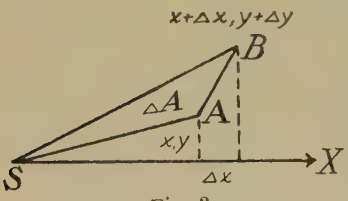


Fig. 3.

Låt solens medelpunkt S vara origo, $A(x, y)$ planetens läge vid tiden t och $B(x + \Delta x, y + \Delta y)$ dess läge vid tiden $t + \Delta t$. Då är $\triangle SAB (= \Delta A)$ ett element av den yta som radien från solen till planeten beskriver.[1] Ur figuren (fig. 3) få vi då:

$$\Delta A = \frac{(x + \Delta x)(y + \Delta y)}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{\Delta x(2y + \Delta y)}{2} =$$

$$= \frac{x\,\Delta y - y\,\Delta x}{2}.$$

Divideras med Δt, så fås efter övergång till limes

$$2\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

Men enligt Kepplers andra lag är $\frac{dA}{dt}$ en konstant. Vi få således

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Deriveras denna ekvation, så fås

$$x\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

således

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

eller

$$\frac{a_y}{a_x} = \frac{y}{x} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

[1] Vi hava i figuren för enkelhetens skull gjort både Δx och Δy positiva, vilket ej kan vara fallet då kurvan är en ellips, men detta är av ingen betydelse, då Kepplers 1:a lag ej kommer till användning i *detta* bevis.

Accelerationen, eller kraften, är således riktad antingen rakt mot eller rakt från solen, men då det senare tydligen vid en planet är omöjligt, så *måste kraften således vara riktad mot solen.*

Vi hava nu fått kraftens riktning. För att få ett uttryck för dess storlek kan man, allt efter klassens ståndpunkt, gå tre skilda vägar.

A) Om klassen är jämförelsevis svag, så kan man i anslutning till Moll resonnera sålunda: Då det ej är sannolikt, att kraften skulle verka efter olika lagar, om planeten går i en elliptisk bana mot om den vore cirkulär, såsom förhållandet i det närmaste är med planeten Venus, så få vi i det senare fallet, och således även sannolikt i det förra:

$$K = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}.$$

Men T^2 är i detta fall enligt Kepplers tredje lag $= cr^3$, således

$$K = \frac{4\pi^2 mr}{cr^3} = C\frac{m}{r^2}.$$

Resonnemanget lider dock, som man lätt ser, av en betänklig brist.

B) Skulle klassen, vilket dock sällan torde vara fallet, vara förtrogen med polära koordinater, så kan man använda följande bevis, som ansluter sig till de i de vanliga läroböckerna i mekanik använda:

Enligt Kepplers första lag är banan en ellips. Lägges då axeln utefter ellipsens storaxel och Origo i solens medelpunkt, så fås med vanliga beteckningar

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \quad \ldots\ldots (1)$$

och Kepplers andra lag kan här skrivas

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = k. \quad \ldots\ldots (2)$$

Om (1) deriveras och värdet av $\frac{d\varphi}{dt}$ insättes ur (2), och $(1 - e\cos\varphi)$ ur (1), så fås

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{pe\sin\varphi}{(1-e\cos\varphi)^2}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{ek\sin\varphi}{p}, \quad \ldots \quad (3)$$

men om v är den tillryggalagda vägen vid tiden t, så är

$$(\Delta v)^2 = r^2(\Delta\varphi)^2 + (\Delta r)^2,$$

således

$$h = r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{r^2} + \frac{e^2k^2\sin^2\varphi}{p^2}. \quad \ldots \quad (4)$$

Men ur (1) fås

$$\cos\varphi = \frac{r-p}{r\cdot e} \quad \therefore \quad \sin^2\varphi = 1 - \frac{r^2+p^2-2pr}{r^2e^2},$$

således $$\frac{e^2\sin^2\varphi}{p^2} = \frac{e^2-1}{p^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2}{pr}$$

och således blir (4):

$$h^2 = k^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{e^2-1}{p^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2}{pr}\right) = k^2\left(\frac{e^2-1}{p^2} + \frac{2}{pr}\right),$$

och genom derivering

$$\frac{d(h^2)}{dt} = -\frac{2k^2}{pr^2}\frac{dr}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Men enligt levandekraftprincipen är kraftens arbete

$$-K\,\Delta r = \frac{m}{2}\Delta(h^2).$$

Således få v enligt (5)

$$-K\frac{dr}{dt} = \frac{m}{2}\frac{d(h^2)}{dt} = -\frac{k^2m}{pr^2}\frac{dr}{dt}.$$

Således

$$K = \frac{mk^2}{pr^2} = C\cdot\frac{m}{r^2}.$$

C) Om klassen ej känner polära koordinater, så kan man använda följande härledning, som visserligen är något längre, men ej använder annan matematik än sådan som bör vara lärjungarna välbekant och därför i alla fall torde ställa sig lättare.[1] Origo lägges, såsom förut, i solens medelpunkt och x-axeln utefter ellipsens storaxel.

Vi påminna först om de två kända formlerna

$$b^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

och

$$r = a + \frac{c}{a}(x-c) = \frac{b^2+cx}{a}. \quad \ldots\ldots (2)$$

Deriveras dessa, så fås

$$b^2(x-c)\frac{dx}{dt} + a^2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{a}\frac{dx}{dt}. \quad \ldots\ldots (4)$$

Vidare använda vi de förut (sid. 6) erhållna formlerna

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k \quad \ldots\ldots (5)$$

och

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0. \quad \ldots\ldots (6)$$

Genom att lösa systemet (3, 5) fås

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a^2ky}{a^2y^2 + b^2x(x-c)}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{b^2k(x-c)}{a^2y^2 + b^2x(x-c)}.$$

Men nämnaren

$$a^2y^2 + b^2x(x-c) = a^2y^2 + b^2(x-c)^2 + b^2c(x-c) =$$
$$= a^2b^2 + b^2c(x-c) = b^2(b^2+cx),$$

vilket enligt (2) är $= b^2ar$.

Vi få således

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{ak}{b^2}\cdot\frac{y}{r} \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{a}\cdot\frac{x-c}{r} \quad \ldots\ldots (8)$$

[1] En sådan härledning har jag ej funnit i någon lärobok, utan torde den kunna anses ny.

Deriveras (8), så fås

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k}{ar^2}\left(r\frac{dx}{dt} - (x-c)\frac{dr}{dt}\right),$$

vilket genom insättning av (4) och (2) lätt reduceras till

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k}{r^2}\frac{dx}{dt},$$

vilket genom (7) blir

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ak^2 \cdot y}{b^2r^3},$$

och genom (6) fås då

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{ak^2x}{b^2r^3}$$

Således accerationen =

$$= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \frac{ak^2}{b^2r^3}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{ak^2}{b^2r^2} = C\frac{1}{r^2},$$

och kraften

$$K = C\frac{m}{r^2}.$$

Vilken av dessa metoder A), B) eller C) man än använder, måste man dock för att få fram den fullständiga Newtonska formeln göra ett tillägg, t. ex. sålunda:

Konstanten C är tydligen oberoende av planetens massa (m), men kan väl vara beroende av den dragande kroppens, solens massa (M). Sätt då

$$C = f(M),$$

således

$$K = f(M)\frac{m}{r^2}.$$

Då är planetens dragning på solen

$$K_1 = f(m)\frac{M}{r^2}.$$

Men enligt lagen om likhet mellan verkan och motverkan är då $K = K_1$.

Således $$m f(M) = M f(m)$$

eller $$\frac{f(M)}{M} = \frac{f(m)}{m} = \text{konstant.}$$

Vi få således $f(M) = kM$, $f(m) = km$ och således

$$K = k\frac{M \cdot m}{r^2}.$$

Några satser rörande fyrhörningar och tetraedrar.

Av AUG. SÖRENSEN.

I de närmast föregående häftena av denna tidskrift förekomma ett par satser rörande en punkts potenssumma med avseende å vissa system av sfärer resp. cirklar. Då dessa satser utgöra specialfall av i nära samband med varandra stående allmännare potenssatser, har jag trott, att en systematisk framställning av hithörande satser skulle kunna vara av intresse. Framställningen gör naturligtvis icke anspråk på att innehålla någonting för matematikern obekant. Den är endast ett försök att framställa de ifrågavarande satserna på sådant sätt, att det inre sambandet mellan dem tydligare framträder.

1. Definitioner och beteckningar.

Genom fyra givna punkter A, B, C, D, godtyckligt belägna i rummet, kan man lägga sex räta linjer AB, AC, AD, BC, BD, CD. Dessa föreningslinjer skära varandra tre och tre i de givna punkterna. Om en rörlig punkt genomlöper fyra sådana föreningslinjer, exempelvis AB, BC, CD, DA, från skärningspunkt till skärningspunkt på sådant sätt, att den återkommer till utgångspunkten, beskriver den en *fyrhörning*. Med en fyrhörning förstås således här en i sig själv sluten kedja av fyra sammanhängande räta linjestycken. De givna punkterna utgöra *hörn*, de beskrivna linjerna *sidor* i fyrhörningen. De i den beskrivna fyrhörningen icke ingående föreningslinjerna utgöra *diagonaler*.

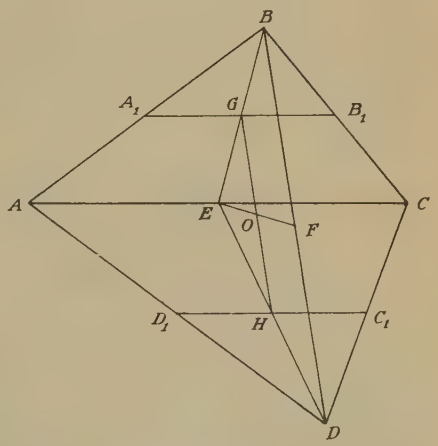
Om fyrhörningen ej är plan, bilda sidor och diagonaler

tillsammans *kanter* i en *tetraeder*. Fyrhörningens sidor bildas av två par motstående kanter i tetraedern, diagonalerna av det återstående paret.

Av fyra givna punkter A, B, C, D kan man genom olika förbindningar bilda tre fyrhörningar $ABCD$, $ABDC$, $ACBD$. Den förstas diagonaler äro AC, BD, den andras AD, BC, den tredjes AB, CD.

I de fyrhörningar, som här betraktas, behöva icke motstående sidor resp. diagonalerna ligga i samma plan. Å andra sidan gälla alla satser, som bevisas för fyrhörningar i allmänhet, även för plana fyrhörningar.

Låt $ABCD$ vara en given fyrhörning. Mittpunkterna på sidorna AB, BC, CD, DA beteckna vi i ordning med A_1, B_1, C_1, D_1, mittpunkterna på diagonalerna AC, BD, med E och F resp. BE och A_1B_1 skära varandra i G, DE och C_1D_1 i H, GH och EF i O.



För de följande bevisen erfordras inga fler punktkonstruktioner, således icke heller några fler beteckningar. De föreningslinjer, som ytterligare omnämnas, kunna lätt tänkas.

A_1B_1 och C_1D_1 äro båda parallella med AC och vardera $= \frac{1}{2}AC$. De äro således sinsemellan parallella och lika stora. $A_1B_1C_1D_1$ är således en pgr. Detsamma gäller fyrhörningarna A_1EC_1F och B_1ED_1F.

BE och DE äro delade mitt itu i G och H, således $GH \parallel BD$ och $= \frac{1}{2}BD$. EF är delad mitt itu i O. Tydligen äro även A_1B_1, C_1D_1 och GH delade mitt itu i G, H och O.

De räta linjer A_1C_1, B_1D_1 och EF, som förena mittpunkterna på motstående sidor och diagonaler i fyrhörningen,

skola i det följande benämnas *medianer*. Två av dessa äro *sidomedianer*, den tredje *diagonalmedian*.

Medianerna gå alla genom O och skära varandra mitt itu i denna punkt. Detta följer omedelbart därav, att A_1EC_1F och B_1ED_1F äro pgr. Det framgår även därav, att O är punktgruppens A, B, C, D tyngdpunkt, och denna måste naturligtvis vara densamma, vare sig den konstrueras med tillhjälp av den ena eller den andra av de tre medianerna.

2. Allmänna satser rörande fyrhörningar och tetraedrar.

Sats 1. Summan av kvadraterna på alla fyra sidorna i en fyrhörning är lika med summan av kvadraterna på diagonalerna, ökad med fyra gånger kvadraten på diagonalmedianen (första mediansatsen för fyrhörningar).[1]

Bevis. Enligt den bekanta mediansatsen för trianglar har man

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\tfrac{1}{2}\overline{AC}^2+2\overline{BE}^2,$$
$$\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\tfrac{1}{2}\overline{AC}^2+2\overline{DE}^2,$$
$$\therefore\quad \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+2(\overline{BE}^2+\overline{DE}^2)$$
$$=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{EF}^2.$$

Sats 2. Summan av kvadraterna på diagonalerna i en fyrhörning är dubbelt så stor som summan av kvadraterna på sidornas medianer (andra mediansatsen för fyrhörningar).

Bevis. Tillämpas sats 1 på vardera av de båda fyrhörningarna $ACBD$ och $ABDC$, har man

$$\overline{BC}^2+\overline{DA}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+4\overline{A_1C_1}^2,$$
$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2+4\overline{B_1D_1}^2,$$

varav genom addition och reduktion

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{A_1C_1}^2+\overline{B_1D_1}^2).$$

[1] Satsen finnes bevisad i denna tidskrift årg. 3, sid. 246, uppgift 56.

Sats 3. Summan av kvadraterna på alla sex kanterna av en tetraeder är fyra gånger så stor som summan av kvadraterna på de räta linjer, som förena mittpunkterna av parvis motstående kanter.

Denna sats framgår omedelbart av de båda föregående.

3. Potenssatser för fyrhörningar och tetraedrar.

Sats 4. Summan av en godtycklig punkts potenser med avseende å de sfärer, som beskrivas över en fyrhörnings sidor såsom diametrar, är lika med 4 gånger samma punkts potens med avseende å den sfär, som beskrives över diagonalmedianen såsom diameter (potenssatsen för fyrhörningar).

Bevis. Enligt mediansatsen för trianglar har man

$$\overline{PA_1}^2+\overline{PB_1}^2=2\overline{PG}^2+\tfrac{1}{2}\overline{A_1B_1}^2,$$
$$\overline{PC_1}^2+\overline{PD_1}^2=2\overline{PH}^2+\tfrac{1}{2}\overline{C_1D_1}^2,$$

varav genom addition

$$\begin{aligned}\overline{PA_1}^2+\overline{PB_1}^2+\overline{PC_1}^2+\overline{PD_1}^2&=2(\overline{PG}^2+\overline{PH}^2)+\tfrac{1}{2}(\overline{A_1B_1}^2+\overline{C_1D_1}^2)\\&=4\overline{PO}^2+\overline{GH}^2+\overline{A_1B_1}^2\\&=4\overline{PO}^2+\tfrac{1}{4}(\overline{AC}^2+\overline{BD}^2).\end{aligned}$$

Summan av punktens P potenser med avseende å sfärerna över fyrhörningens sidor är då

$$s=4\overline{PO}^2+\tfrac{1}{4}(\overline{AC}^2+\overline{BD}^2)-\tfrac{1}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2),$$

således enligt första mediansatsen för fyrhörningar (sats 1)

$$s=4\overline{PO}^2-\overline{EF}^2=4(\overline{PO}^2-\tfrac{1}{4}\overline{EF}^2),$$

varmed satsen är bevisad.

Av sats 4 framgår, att orten för en punkt, så belägen, att dess potenssumma med avseende å de över en given fyrhörnings sidor såsom diametrar beskrivna sfärerna är konstant, är en kring medianernas mittpunkt beskriven sfär.

Tillämpas potenssatsen för fyrhörningar (sats 4) på de tre fyrhörningarna $ABCD$, $ABDC$, $ACBD$ var för sig, er-

hålles genom addition (och division med 2) ytterligare följande sats:

Sats 5. Summan av en godtycklig punkts potenser med avseende å de sfärer, som beskrivas över kanterna av en tetraeder såsom diametrar, är dubbelt så stor som summan av samma punkts potenser med avseende å de sfärer, som beskrivas över föreningslinjerna mellan mittpunkterna av parvis motstående kanter såsom diametrar (potenssatsen för tetraedrar).

Då de tre sistnämnda sfärerna äro koncentriska (med medelpunkten i O), framgår härav, att orten för en punkt, så belägen, att dess potenssumma med avseende å de över kanterna av en tetraeder beskrivna sfärerna är konstant, är en kring tetraederhörnens tyngdpunkt såsom medelpunkt beskriven sfär.

Av särskilt intresse är det fallet, att motstående kanter i tetraedern äro parvis vinkelräta mot varandra. Då är nämligen enligt en bekant sats[1]

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$$

och således enligt andra mediansatsen för fyrhörningar (sats 2)

$$\overline{B_1D_1}^2+\overline{EF}^2=\overline{A_1C_1}^2+\overline{EF}^2=\overline{A_1C_1}^2+\overline{B_1D_1}^2,$$

således $$A_1C_1=B_1D_1=EF.$$

Ur den allmänna potenssatsen för tetraedrar (sats 5) erhålles då följande sats:

Sats 6. Summan av en godtycklig punkts potenser med avseende å de sfärer, som beskrivas över de sex kanterna av en tetraeder med parvis mot varandra vinkelräta kanter (Gegenseiten) *såsom diametrar, är 6 gånger så stor som samma punkts potens med avseende å den sfär, som går genom kanternas mittpunkter.*

I det speciella fallet, att tetraedern är reguljär, erhåller sats 6 följande lydelse:

[1] Ett enkelt bevis för denna sats angives i denna tidskrifts 5 årg. (uppgift 102, sid. 191).

Summan av en godtycklig punkts potenser med avseende å de sfärer, som beskrivas över en reguljär tetraeders kanter såsom diametrar, är 6 gånger så stor som samma punkts potens med avseende å den mellanskrivna sfären.

Av denna sats är uppgift 112 i denna tidskrifts 5 årg. (sid. 187) ett specialfall. Om punkten P ligger på den mellanskrivna sfären, är ju dess potens med avseende å denna sfär $= 0$.

Samtliga här anförda satser äga giltighet även för plana fyrhörningar och tetraedrar. Vill man inskränka satserna till planet, behöver man endast överallt utbyta *sfär* mot *cirkel* o. s. v. Uppgift 126 i denna tidskrifts 6 årg. (sid. 45) framgår således såsom den mot den allmänna potenssatsen för fyrhörningar (sats 4) svarande plangeometriska satsen. Den mot sats 6 svarande plangeometriska satsen skulle exempelvis kunna formuleras sålunda:

Summan av en godtycklig punkts potenser med avseende å de cirklar, som uppritas på sidorna och på de övre höjdsegmenten av en triangel såsom diametrar, är 6 gånger så stor som samma punkts potens med avseende å niopunktscirkeln.

Genom specialiseringar i olika riktningar kan man erhålla ytterligare satser. Låter man exempelvis punkterna B och D sammanfalla, erhålles ur den allmänna potenssatsen för fyrhörningar (sats 4) följande potenssats för trianglar:

Summan av en godtycklig punkts potenser med avseende å de sfärer (cirklar), som beskrivas över två sidor av en triangel såsom diametrar, är dubbelt så stor som samma punkts potens med avseende å den sfär (cirkel), som beskrives över medianen till den tredje sidan såsom diameter.

Tillämpas denna sats på sidorna, sammantagna två och två, erhålles genom addition följande sats:

Summan av en godtycklig punkts potenser med avseende å de sfärer (cirklar), som beskrivas över en triangels sidor såsom diametrar, är lika med summan av samma punkts potenser med avseende å de sfärer (cirklar), som beskrivas över medianerna såsom diametrar.

Några undersökningar över lösta ämnens diffusion.

Av A. FRENDEL.

II.[1]

Diffusionens beroende av formen och volymen av det kärl, i vilket det lösta ämnet diffunderar in.

Jag har tre glasrör av samma diameter, tillslutna i ena ändan. På det ena blåser jag ut ett par kulor, som fig. 3 visar, medan jag drager ut det andra, så att en förträngning uppstår. De tre rören stickas genom en kork och fyllas med vatten. Därefter ställer jag rören upp och nedvända med mynningen c:a 1,5 cm under ytan av en homogen, koncentrerad lösning av kaliumpermanganat (se fig. 3). Kaliumpermanganatet diffunderar då in i rören. Jag iakttager rören varje dag. *Det visar sig, att diffusionen vid varje observerat tillfälle har stigit lika högt i alla tre rören.* Efter 8 dagar uppgår diffusionspelarens höjd till 12,5 à 13 cm. Toppen har då hunnit en god bit över utvidgningen i röret *a* (resp. förträngningen i röret *c*) och befinner sig åter i den del av rören, där de äro lika vida. På samma höjd ha pelarna i de olika rören samma färgnyans, alltså till synes samma koncentration. Detta gäller både ovanför och nedanför utvidgningen (resp. förträngningen). (På de ställen, där rören och alltså

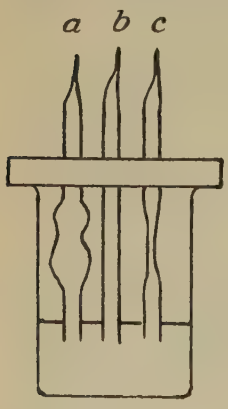


Fig. 3.

[1] Forts. från h. 1 denna årg.

även vätskeskikten ha olika vidd, kan en sådan uppskattning ge felaktigt resultat.) Man ledes då till den förmodan, att koncentrationen på samma höjd är lika i alla tre rören. Om denna förmodan är riktig, skulle den ämnesmängd, som på samma tid diffunderat in i rören vara olika, störst för *a* och minst för *c*. För att undersöka, om så är förhållandet, lyfter jag upp rören ur cylindern, torkar försiktigt nedtill med filtrerpapper bort nedhängande droppar, håller rören över en tom bägare och kniper av spetsen på ett av rören. Innehållet rinner då ner i bägaren. På samma sätt förfares med de två andra rören. Därefter titreras mängderna av $KMnO_4$ medelst en surgjord lösning av $FeSO_4$.

För avfärgning behövdes:

för röret *a*: ..... 15,54 cm^3
» » *b*: ..... 14,93 »
» » *c*: ..... 14,92 »

Skillnaden för de tre rören blev alltså icke stor. Man skulle snarare kunna ledas till slutsatsen, att det diffunderat in lika stora mängder i alla rören. Emellertid ligger förklaringen på ett annat håll: Koncentrationen avtar ju, som jag förut har visat, mycket hastigt uppåt. Det som huvudsakligen kommer att bestämma ämnesmängden är alltså den nedersta delen av rören, där lösningen är starkast koncentrerad; och där voro ju de tre rören lika vida.

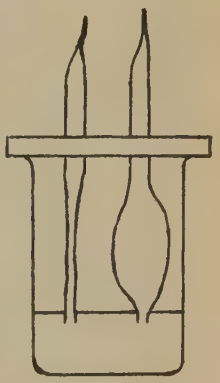


Fig. 4.

För att pröva, om tydningen på nyssnämnda resultat var riktig, gjorde jag om försöket, men ställde så till, att de rör jag nu använde, redan ganska nära mynningarna hade mycket olika vidd (se fig. 4). I själva mynningen voro däremot rören, liksom i föregående försök, lika vida. (De voro tagna ur ett och samma glasrör, som avskurits i den förträngda delen.) Efter något mer än 3 dygn hade diffusionspelaren stigit till c:a 8 cm, lika högt

i båda rören. Vid titrering visade det sig, att det åtgick 23,60 cm^3 $FeSO_4$ för att avfärga det vidare rörets innehåll, medan det smalare röret endast krävde 11,55 cm^3. I det bredare röret hade det diffunderat in mer än dubbelt så mycket kaliumpermanganat som i det smalare, fastän mynningen hade samma genomskärningsyta i båda rören. *Min tydning av resultatet i föregående försök hade alltså visat sig vara riktig.*

Vid den nedre mynningen förekommer samma koncentration i de båda rören. Diffusionen har trängt lika högt i båda. På denna höjd, dit diffusionen just nått, är koncentrationen alltså också lika i båda rören (= 0). När koncentrationen överensstämmer i de båda rören vid basen och toppen av diffusionspelaren, och dessa ligga på samma nivå i båda rören, kan man väl vara berättigad att förmoda, att koncentrationen även i alla andra horisontella skikt av de båda rören, som ligga på samma höjd, överensstämma med varandra. D. v. s. att koncentrationsfördelningskurvan vid stigning rakt uppåt i en diffusion stadd vätska är densamma alltid, oberoende av kärlets form. Men härav följer å andra sidan — och det nyss beskrivna experimentet bevisar det — att den substansmängd, som på lika tider (= sedan diffusionens början) passerat genom mynningarna av de båda rören, är olika, och detta trots att:

1) tvärsnittet är lika i båda mynningarna,
2) diffusionen trängt lika långt i båda rören och alltså
3) koncentrationsfallet vid mynningen med all sannolikhet är detsamma i båda rören.

Om Ficks formel ägt giltighet för detta fall, borde diffusionsströmstyrkan blivit lika i båda rören. *Då så icke är förhållandet, kan alltså icke Ficks formel gälla för diffusionen i rör, som icke överallt äro jämntjocka.*

III.

Diffusionens beroende av mynningens storlek hos det kärl, i vilket det lösta ämnet diffunderar in.

I avd. II har jag visat, att de genomdiffunderade ämnesmängderna bli olika, ifall formen är olika hos de rör, i vilka ämnena diffundera in, och detta fastän genomskärningsytan i mynningen är densamma för de olika rören. Det ligger då nära till hands att fråga sig: *Hur skall det bli, om de olika rören ha precis samma volym och form och endast mynningens storlek är olika?*

För att få denna fråga besvarad gjorde jag i ordning tre glasrör av samma inre diameter (8,7 mm) och upprepade med dem försöket i II. I mynningen på det ena fastsatte jag med hjälp av litet paraffin en halvcirkelformig bit tunt järnbleck, som täppte för hälften av rörets mynning. I det andra rörets mynning fastsattes på samma sätt en bleckbit av samma storlek som röret, men med endast en kvadrant urklippt. I det tredje röret lät jag mynningen vara helt fri. Mynningarna i de tre rören kommo alltså att förhålla sig till varandra som 1 : 2 : 4, medan rören för övrigt voro lika. Efter 4 dygn bestämde jag genom titrering de indiffunderade mängderna av $KMnO_4$. Resultatet synes i tabell 2.

Tabell 2.

Mynningens yta	Genomdiffund. ämnesmängd
1	29,15 cm³
2	29,04 »
4	31,86 »

(Även denna gång hade diffusionen skridit lika lång sträcka i alla tre rören.) Av tabellen framgår, att den genomdiffunderade ämnesmängden är ungefär densamma i alla tre fallen. De små skiljaktigheter, som uppstått, kunna lätt förklaras såsom beroende på, att något olika vätskemängder häftat

vid nederst på rören, när jag lyft upp dem ur den homogena kaliumpermanganatlösningen. Där nere är ju koncentrationen störst.

Det kan alltså anses fastslaget, att *diffusionsströmstyrkan inom vissa gränser är oberoende av genomskärningsytan på det ställe, där diffusionen börjar. Men den beror av formen och volymen av det kärl i vilket ämnet diffunderar in.* Ej heller för detta fall kan man alltså använda Ficks formel. Enligt denna borde ämnesmängderna förhålla sig såsom genomskärningsytorna.

Jag gjorde mig nu frågan: *Gäller den nyssnämnda lagen, hur små mynningarna än göras?*

För att avgöra detta och eventuellt få den undre gränsen för lagens giltighet fastställd gjorde jag om försöket sålunda, att jag täppte till mynningen på de två rören med cirkelrunda bleckbitar, medan det tredje var öppet. I mitten av den ena bleckbiten hade jag borrat ett cirkelrunt hål på 1 mm diameter, i den andra bleckbiten ett hål på 3 mm diameter. Mynningens diameter hos det tredje glasröret var 8,7 mm. De ämnesmängder, som på lika tider diffunderade in i de olika rören, finnas i nedanstående tabell:

Tabell 3.

Mynningens diameter	Mynningens genomsk.-yta	Genomdiffund. ämnesmängd
1 mm	$\frac{\pi}{4} \cdot 1$ mm^2	0,52 cm^3
3 »	$\frac{\pi}{4} \cdot 9$ »	23,35 »
8,7 »	$\frac{\pi}{4} \cdot 75{,}7$ »	33,16 »

Som synes försvåras diffusionen ytterligt starkt, när mynningens genomskärningsyta minskats så mycket, att den börjar antaga kapillära dimensioner. Minskningen har för övrigt redan börjat visa sig för en diameter på mynningen av 3 mm.

*

För att få en kvantitativ bekräftelse på det antagande, som jag framställt i det föregående, att koncentrationsfördelningskurvan vid diffusion är oberoende av kärlets form, gjorde jag följande försök: Jag fastsatte tre lika vida glasrör i en kork, såsom fig. 5 visar. Ett av dem stod lodrätt,

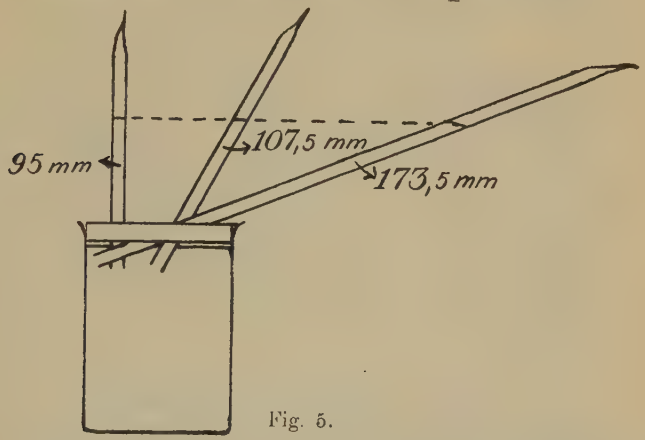


Fig. 5.

medan de två andra bildade olika lutning mot horisontalplanet. Rören, som voro slutna upptill, fylldes med rent vatten, och korken fastsattes i en bägare, fylld med en homogen lösning av kaliumpermanganat, så att mynningarna av rören doppade ner i lösningen.

Det visade sig, medan diffusionen pågick, att den vertikala stighöjden blev lika i alla tre rören, som man ju också kunde antaga, om stighöjden skall vara oberoende av kärlets form. Är det nu så, som jag förut förmodat, att koncentrationen för samma horisontella nivåytor är densamma i alla tre rören, så böra ämnesmängderna i de tre rören förhålla sig såsom de horisontella snittytorna av rören. Om radien i ett rör är r och rörets lutningsvinkel mot horisontalplanet är v, så blir ju den horisontella snittytan en ellips med ytan $\frac{\pi \cdot r^2}{\sin v}$. *De indiffunderade ämnesmängderna böra alltså vara omvänt proportionella mot sinus för rörets lutningsvinkel mot horisontalplanet.*

Vid mitt försök var den lodräta stighöjden i alla tre rören 95 mm. I de lutande rören hade diffusionen inträngt 107,5 resp. 173,5 mm. Om dessa rörs lutningsvinkel mot horisontalplanet äro resp. v_1 och v_2, så är alltså:

$$\sin v_1 = \frac{95}{107,5}, \text{ och } \sin v_2 = \frac{95}{173,5}.$$

Kallas ämnesmängderna i de tre rören för S, S_1 och S_2 resp., så är alltså:

$$S_1 = \frac{S}{\sin v_1} = \frac{S \cdot 107,5}{95}$$

$$S_2 = \frac{S}{\sin v_2} = \frac{S \cdot 173,5}{95}$$

eller

$$\frac{S}{95} = \frac{S_1}{107,5} = \frac{S_2}{173,5}.$$

Den sista likheten kan uttryckas så: *De indiffunderade ämnesmängderna äro direkt proportionella mot diffusionspelarnas längder.*

Vid mitt försök erhölls följande resultat:

Tabell 4.

Indiffund. ämnesmängd S	Diffusionspelarens längd d	$\frac{S}{d}$
25,73 cm³	95 mm	0,271
29,20 »	107,5 »	0,272
47,57 »	173,5 »	0,274

Försöksresultatet bekräftar alltså tillfullo de ovan dragna slutsatserna.

Några försök vid undervisningen i elektrokemi i skolan.

Av BROR GUSTAVER.

I denna tidskrift, årg. 5 (1921—22), sid. 39, har lektor G. Starck framlagt »några synpunkter på undervisningen i elektrokemi i skolan», varvid han redogör för en framställningsmetod vid genomgången i R III av de galvaniska elementen, och visar, hur den Nernst'ska formeln för potentialdifferensen mellan en elektrod och en lösning innehållande joner av samma ämne på ett på detta stadium fattbart sätt kan verifieras medelst försök med ett koncentrationselement

$$Ag \,/\, konc.\ AgNO_3 \,/\, utsp.\ AgNO_3 \,/\, Ag.$$

Författaren till dessa rader hade nöjet att på sin tid åhöra nobelpristagarens, prof. W. Nernst's, nobelföreläsning — just över teorin för det galvaniska elementet — varvid denne utförde ett par eleganta, förbluffande enkla och teorin belysande försök. Jag föreställer mig, att just dessa försök skulle synnerligen väl lämpa sig även för skolstadiet, antingen utförda ensamma för sig eller jämte det av lektor Starck beskrivna försöket.

Försök 1.

Det första av dessa försök har till ändamål att demonstrera ett koncentrationselement. Apparaten består av ett U-rör (12—20 cm långt, 20—25 mm vitt), i vilket bomull instoppas i kröken för att hindra vätskorna i skänklarna att blanda sig med varandra. I vardera skänkeln ihälles cirka 10-procentig lapislösning och däri neddoppas ett väl rengjort silverbleck. Elektroderna sättas i förbindelse med ett vertikalgalvanoskop av den typ, som användes till skol-

bruk.[1] Apparaten är justerad så att visaren pekar på 0. *Vid slutandet av strömkretsen erhålles intet utslag.*

Därefter minskas $Ag^{\cdot}$-koncentrationen i den ena skänkeln på så sätt, att mättad koksaltlösning (för att undvika stora vätskemängder) tillsättes (i andra skänkeln ihälles lämpligen lika mycket lapislösning), varvid AgCl utfaller. *Galvanoskopet ger ögonblickligen utslag, och man finner med användande av tumregeln, att silverblecket i den konc. lösningen blir pos. polskiva.* Strömmen är konstant, ty utslaget ändras ej.

AgCl är emellertid i viss grad löslig och lösningen innehåller $Ag^{\cdot}$. $Ag^{\cdot}$-koncentrationen kan ytterligare nedsättas genom bildandet av komplexa joner innehållande silver vid tillsats av KCN (detta torde vara bekant för eleverna, bl. a. användes ju kaliumsilvercyanid vid försilvring). Vid tillsats av KCN-lösning löser fällningen upp sig och *utslaget ökar till ett nytt konstant värde.* Att utslagets storlek (och följaktligen även elementets elektromotoriska kraft) är oberoende av silverbleckens storlek är lätt att övertyga sig om genom att lyfta dem delvis upp ur lösningen. Strömmens uppkomst måste bero på, att det råder en potentialdifferens mellan silverblecket och silversaltlösningen *och dennas storlek är beroende på silverjonskoncentrationen* ($Na^{\cdot}$- och $K^{\cdot}$-koncentrationen inverkar ej, vilket lätt visas genom att tillsätta ytterligare NaCl- eller KCN-lösning).[2]

Man kan nu giva eleverna Nernst's formel såsom lektor Starck skriver den (se hans uppsats)

$$E_1 = k \cdot \log \frac{c_1}{c_0},$$

$$E_2 = k \cdot \log \frac{c_2}{c_0},$$

[1] Ett litet billigt galvanoskop från Physikalische Werkstätten, Göttingen, visade sig vid ett av mig utfört försök vara känsligare än vårt vertikal-galvanoskop (av skolmodell).

[2] I anslutning till försök 1 kan man sedan vid lämpligt tillfälle påpeka, varför detta koncentrationselement är konstant. Blecken förändras ju ej genom utfällning på resp. upplösning från desamma av silver. Får elementet lämna ström utjämnas genom den elektrolytiska processen koncentrationsdiff. mellan lösningarna, och därmed upphör orsaken till strömalstringen att finnas till.

och $\therefore E_1 - E_2 = k \cdot \log \frac{c_1}{c_2}$.

Har man nu tid och tillfälle att pröva formeln i enlighet med det av lektor Starck beskrivna försöket är detta utan tvivel synnerligen värdefullt, annars övergår man till

försök 2,

som visar jonkoncentrationernas betydelse för ett galvaniskt element med två olika metaller. Exempel utgör Daniells element

$$Cu \,/\, CuSO_4 \,/\, ZnSO_4 \,/\, Zn.$$

Apparaten är densamma som förut, ett U-rör med bomull instoppad i kröken. Kopparblecket rengöres väl och zinkblecket amalgameras före användandet. När strömkretsen slutes genom att polskivorna doppas ned i resp. lösningar gör galvanoskopets visare utslag, och strömmens riktning fastslås medelst tumregeln. Därefter minskas $Cu^{\cdot\cdot}$-koncentrationen på så sätt, att svavelammonium eller svavelvätevatten tillsättes till $CuSO_4$-lösningen. (I andra skänkeln påfylles $ZnSO_4$-lösning.) *Utslaget på galvanoskopet minskar till ett nytt konstant värde.* I likhet med vid föregående försök kan $Cu^{\cdot\cdot}$-koncentrationen ytterligare nedbringas genom tillsättandet av KCN-lösning, varvid en komplex negativ jon, innehållande koppar, uppstår. Man måste noga se till att ej svart CuS får bli sittande kvar på kopparblecket, utan att all fällning på och omkring detta går i lösning. *Galvanoskopets utslag sjunker ända till 0 och därefter gör visaren ett visserligen litet men dock fullt tydligt utslag åt andra hållet,* varav framgår, att elementet nu lämnar ström i motsatt riktning mot förut. I det av lektor Starck så formulerade uttrycket på den elektromotoriska kraften

$$E_{Cu} - E_{Zn} = k \cdot \log \frac{C_{0\,Zn}}{C_{0\,Cu}} \cdot \frac{C_{Cu}}{C_{Zn}}$$

är således ej längre förhållandet mellan metallernas lösningstensioner, bråket $\frac{C_{0\,Z}}{C_{0\,Cu}} = 10^{38}$ bestämmande, utan förhål-

landet mellan jonkoncentrationerna $\frac{C_{Zn}}{C_{Cn}}$ antar på grund av det oerhört ringa värdet på C_{Cu} ett ännu större värde, och högra sidan i formeln blir negativ.

I samma ovan nämnda uppsats av lektor Starck har denne under rubriken 2. *Polarisation* beskrivit ett annat försök, som utföres på följande sätt:

I en bägare äro ett knäböjt kopparbleck och en amalgamerad zinkskiva nedsatta i utspädd svavelsyra. Om elementet kortslutes med en voltmeter, visar denna först en spänning av cirka 1,1 volt, som emellertid hastigt avtar på grund av att kopparplattan blir belagd med vätgas. Beströs nu kopparblecket med pulveriserad brunsten, så skulle spänningen genast stiga till sitt ursprungliga belopp.

Jag har flera gånger sökt utföra detta lilla enkla försök, men ej erhållit önskat resultat. Genom upprepade försök kom jag underfund med, att det är fördelaktigt, om kopparblecket göres tämligen litet, så att man erhåller större strömtäthet å detsamma och därigenom detta hastigare belagt med vätgas. Den horisontella delen av polskivan bör ej hava mer än ungefär en tvåörings storlek, och förbindelseledningen ned till denna göres så fin som möjligt. Vidare får ej voltmetern erbjuda alltför stort motstånd. Jag använde en komb. prec. volt- och amp.-meter från Gans och Goldschmidt, Berlin, av den vanliga modellen (vridspoletyp) med spegelskala och 2 graderingar å skalan, avsedda för spänningar 0—10 resp. 0—1 volt. Inkopplades det större motståndet, visade sig spänningen vara konstant mellan 1,0 och 1,1 volt, under det att densamma, då det mindre motståndet i stället användes, hastigt avtog till ett värde mellan 0,4 och 0,5 volt. Strödde sedan pulv. brunsten på den horisontella kopparpolskivan, så steg spänningen först hastigt och sedan långsammare upp till 1,1 volt. Som voltmetern vid denna koppling ej tillåter mätning av högre spänning än 1,0 volt, måste naturligtvis försöket avbrytas, innan detta värde är uppnått.

Karlstad i januari 1923.

Ett par laborationsuppgifter till elasticitetsläran.

Av T. E. AURÉN.

Elasticitetsläran intar en synnerligen blygsam plats i skolfysiken. I Molls lärobok anslås åt denna gren av fysiken knappt mer än en enda sida. Huru önskvärt det än kan vara att större uppmärksamhet kunde ägnas åt elasticitetsläran, kan det ju dock ifrågasättas, huruvida icke andra delar av fysiken, som även behandlas alltför knapphändigt, i första rummet borde bliva tillgodosedda. Under de frivilliga laborationsövningarna torde det dock i varje fall vara möjligt att bereda åtminstone de mer intresserade lärjungarna tillfälle att stifta närmare bekantskap med elasticitetsläran. Det gäller då att söka anordna lämpliga försök med enklaste möjliga hjälpmedel.

Bestämning av elasticitetsmodulen genom att medelst katetometer uppmäta förlängningen vid sträckning av en tråd kan ju knappast ifrågakomma på skolstadiet. Katetometern måste utbytas mot ett enklare och framför allt billigare instrument. För uppmätning av förlängningen har jag med fördel begagnat mig av mikrometerskruven. Den tråd, som skall undersökas, fästes i en stadig krok i taket eller ännu bättre vid en i väggen fäst järnkonsol på sådant sätt, att den, då den spännes medelst vikter, som anbringas på en i dess nedre ända fäst vågskål, kommer att hänga på ungefär 1 cm avstånd från kanten av ett väggfast fönsterbord eller en väggfast hylla (Fig 1). På hyllan fästes en hållare (H), i vilken en mikrometerskruv (M) kan fastskruvas. I träskivan, som uppbär hållaren, finnes ett hål, genom vilket tråden får löpa. På tråden fastskruvas en vanlig på övre

sidan plant avfilad slangklämmare, så att tvärstycket (T) kommer att befinna sig i mikrometerskruvens gap. Genom att vid sidan av vågskålen placera ett par stativ, kan man lätt förhindra, att tråden vrider sig så, att klämmaren kommer ut ur gapet. Förlängningen bestämmes nu lätt genom att före och efter belastningen skruva till skruven, så att den kommer i kontakt med klämmaren, och sedan avläsa densamma. Kontakten kan med stor skärpa iakttagas därigenom, att klämmaren då den beröres av skruven vrides åt sidan. Naturligtvis måste eleverna erinras om nödvändigheten av att skruva upp skruven, innan vågskålen avlastas. Med den nu beskrivna enkla avläsningsmetoden kunna fullt tillfredsställande värden på elasticitetsmodulen erhållas.

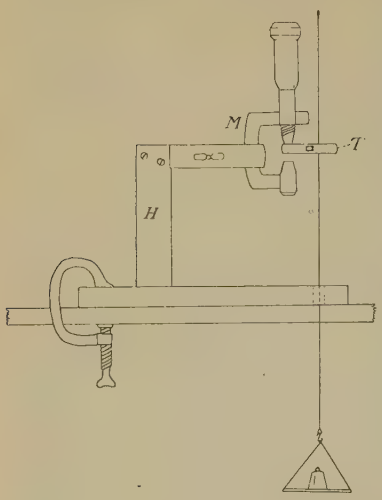


Fig 1.

Böjningens storlek vid en stång eller bjälke, som utsättes för tryck, är ett problem av mycket stort praktiskt intresse och förtjänar väl att göras till föremål för experiment i skolan. Varje vaken skolyngling torde säkerligen ha iakttagit, att plankor och bjälkar, som användas i trossbottnar, alltid ställas på kant, och torde också gärna själv vilja övertyga sig om betydelsen härav.

Vid en stav med rektangulärt tvärsnitt, som är fäst vid ena ändan och belastas vid den andra, gäller som bekant för böjningen (s) formeln:

$$s = \frac{4Pl^3}{E\,bh^3}$$

där P är belastningen, l stavens längd, b tvärsnittets bredd och h dess höjd samt E elasticitetsmodulen. Ett försök för prövning av denna formel kan enkelt anordnas

på det sätt, som fig. 2 utvisar. Vid stavens fria ända och vid dess mitt äro byglar med öglor anbragta, i vilka en vågskål medelst en krok kan upphängas. Vid kroken är en knappnål (K) fastlödd så att den, då vågskålen upphänges, intar ett horisontellt läge. Bakom vågskålen placeras en spegelskala, så att knappnålens läge kan bestämmas. Försök utföras dels med stavens bredsida, dels med dess kortsida horisontell. För att kunna bekvämt och säkert fästa staven kan en liten träränna (R), i vilken staven inskjutes, användas. Följande tabell återger

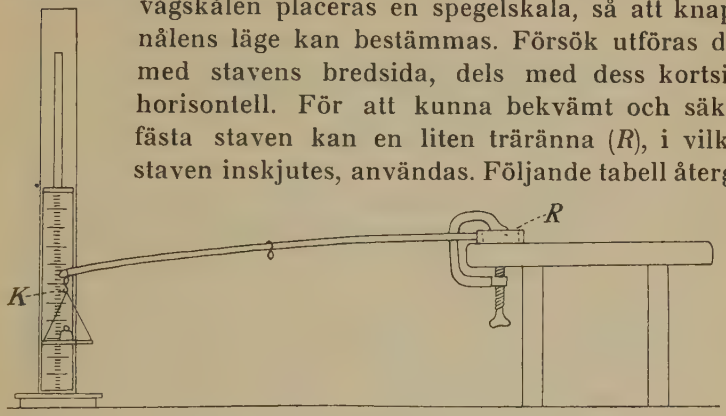


Fig 2

de resultat, som en av mina elever erhöll vid böjningsförsök, som utfördes med den beskrivna försöksanordningen för bestämning av elasticitetsmodulen hos en trästav.

l	b	h	P	s	E
i mm			i kg	i mm	
927	22	9,9	0,2	23	1298
927	22	9,9	0,3	35	1280
927	22	9,9	0,4	45	1327
425	22	9,9	1,0	13	1107
425	22	9,9	2,0	25	1151
915	9,9	22	0,5	12	1212
915	9,9	22	1,0	23	1265
				Medeltal:	1234

En prövning av motsvarande formel, då staven understödes i båda ändarna och belastas på mitten, kan naturligtvis utföras på enahanda sätt, om staven placeras på tvenne eggar.

En demonstrationsvåg.

Av HJ. MANDAL.

Nedan avhandlade demonstrationsvåg har ett par företräden framför flertalet andra typer, vilka kunna motivera att den här närmare beskrives. Den är en visarvåg, vars utslag äro så stora att de kunna på c:a $^1/_4$ gr när avläsas från *alla* platser i en fysiksal av medelstorlek; samtliga elever äro alltså samtidigt med om vägningen. Den medger dessutom tarering som en vanlig balansvåg.

Princip: vågen kan sägas vara en modell i stor skala av en brevvåg av rätt vanlig typ (hävstången *DAC*), kombinerad med en extra hävstångsarm *BA*, som med *AC* bildar en *rak* hävstång *BAC*. Man inser, att om i *B* upphänges en vikt, så avpassad, att vågen, då den i *C* belastas med 50 gr, visar 0 gr, så kommer denna motvikt i varje vågens läge att upphäva 50 gr av vikten i *C*. Vikten av föremålet i *C* fås genom att till den avlästa vikten addera 50 gr. Vågens mätområde har *med oförändrad känslighet* flyttats från 0—50 gr till 50—100 gr. Med andra motvikter kan man efter behag få andra mätområden. Och om man i *C* upphänger en bägare och i *B* en tara så att vågen visar 0 gr (man bör givetvis ha för detta ändamål särskilt avsedda, numrerade bägare med tillhörande taror), så anger vågen sedan direkt vikten av t. ex. en vätskemängd som hällts i bägaren.

Vid de modeller jag gjort var visarens längd något över 60 cm, skalans längd alltså omkr. 100 cm, utslaget för 1 gr c:a 2 cm.

För det praktiska utförandet meddelas här några mått. Fotplattan *F* (fig. 1) göres 65 × 12 × 1 cm, ståndarna *S* 65 × 3 × 0,8 cm. Ståndarna infällas och limmas i bottenplattan, sedan upphängningen av hävstången skett påsättes tvärslån *T*.

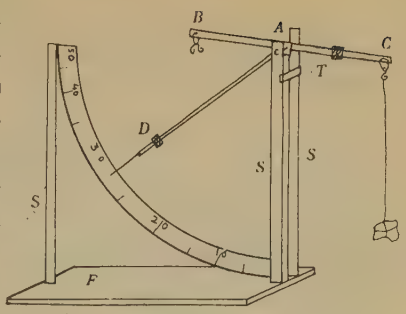


Fig. 1.

För hävstången göres först en parallellepiped *P* 3 × 3 × 2 cm (fig. 2). Ena hörnet på denna avsågas i 45° vinkel c:a 1 cm från hörnet. På den sida som sedan skall bli framåt infälles hävstångsarmen *BAC* 30 × 1,5 × 1 cm. Man bör se till att *BAC*:*s* och *P*:*s* främre ytor komma i samma plan. På parallellepipedens bakre yta infälles visaren, c:a 50 cm lång 1 × 0,5 cm eller mindre i genomskärning.

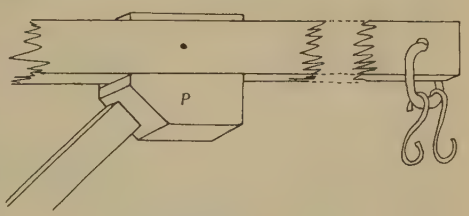


Fig. 2.

De föremål som skola vägas upphängas i krokar hängande i en slinga av järntråd, något liknande fig. 2. Järntråden måste löpa lätt i hålet. Motsvarande anordning, helst med 3 à 4 krokar, finnes i tareringsarmens ända. *Underkanterna* av hålen i hävstångsarmarna samt *axelns mittpunkt* skola befinna sig så noggrant som möjligt i rät linje. Detta är ju villkoret för att samma skala skall vara användbar 0—50 gr och t. ex. 50—100 gr.

Upphängningen anordnas lämpligen på följande sätt. Man drar ut och smälter till ett stycke glasrör samt ger det en »krage» så att det får genomskärning enl. fig. 3 *GG*. Ett stycke av en strumpsticka tillspetsas i båda ändar och anbringas som axel. 1 à 2 cm från ståndarnas övre ändar ha glasrörsbitarna inpassats i hål. Hävstångsarmen sättes

in och tvärslån *T* (fig. 2) påsättes, varvid tillses att det blir lagom tryck från glasrören mot axelspetsarna. Friktionen blir med denna anordning mycket liten. Annars kan man helt enkelt låta axeln vila mot ett par glasrörsbitar som lager.

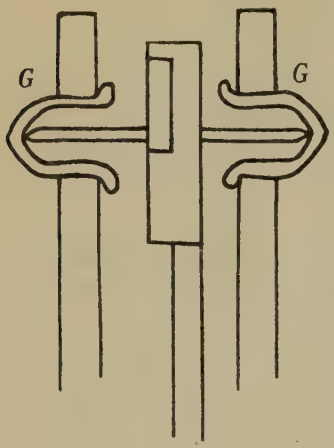


Fig. 3.

Skalan göres av tjock papp med påklistrat ritpapper; den graderas empiriskt. Av c:a 1 ½ mm tjock blyplåt gör man två motvikter, en placerad rätt långt ut på visaren, en på armen *AC*. Genom förskjutningar av dessa kan man åstadkomma att skalans 0- och 50-streck befinna sig i skalans yttersta ändar så att *hela* skallängden utnyttjas. Visaren förses med en spets av ett stycke strumpsticka, denna böjes ev. bajonettformigt så att den rör sig nära skalan (för att minska parallaxen). Man får naturligtvis se till att visarens vridningsaxel är noggrant vinkelrät mot skalans plan.

Vågen är framför allt nyttig vid vägningar i 4:an; på en lektion kan man hinna med att bestämma en kropps vikt i flera vätskor och deplacementens vikt. För första ringen erbjuder den ett exempel på en mera komplicerad hävstång[1].

[1] Sedan vågen konstruerats befanns vid rannsakning av litteraturen att idén med den tredje armen använts förut, dock endast för tarering, ej för utökning av mätområdet (W. Schmidt, Poskes Zeitschr. XVI: 381).

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Ett riskabelt försök med klor.

I Tom Molls Lärobok i Kemi för Realskolan, del I, står upptaget ett försök med klor, som är teoretiskt mycket tilltalande, men vars risker det kanske kan vara skäl att fästa uppmärksamheten på. — Några tunna skivor natrium inläggas i en kolv, och i denna inledes därpå klorgas. Kolven korkas sedan löst och får stå några dagar, varefter det visar sig, att natriumskivorna omvandlats (åtminstone på ytan) till ett vitt pulver, som kan visas vara koksalt. — Jag har åtskilliga gånger gjort detta försök, utan att något märkvärdigt inträffat. Men en gång, då jag häftigt skakade kolven för att skorpan av koksalt skulle pulveriseras, inträffade en ofantligt kraftig explosion, som splittrade kolven i småbitar. (Jag hade endast mycket små mängder natrium och en liten rundkolv på c:a 75 cm^3). Vad orsaken kan vara, är jag icke fullt säker på. Natrium suger ju alltid upp något av den fotogen, i vilken det ligger förvarat, och möjligen kan kloren ha inverkat på denna på något sätt, så att en explosiv klorförening bildats. Att märka är, att kolven var fullständigt torr, och att de natriumskivor, jag skar ut för att lägga i kolven, *till synes* voro fullständigt felfria. *A. Frendel.*

Det sneda prismat och pyramiden.

Följande lärogång, som jag icke återfunnit i någon av mig känd lärobok i stereometri, torde kunna förtjäna något beaktande.

Sedan det räta prismat behandlats, övergår man till pyramiden, i första hand en sådan, som har en sidokant vinkelrät mot basytan. Man bevisar nu med tillhjälp av formeln för det räta prismats volym, att två pyramider, som var och en hava en sidokant vinkelrät mot basytan, äro lika stora, då de hava lika stora basytor och lika stora höjder. De kunna ju genom sönderdelning i tunna skivor inneslutas mellan samma föränderliga gränser, bestående av summor av räta prismatiska skivor, och vilkas skillnad kan göras hur liten som helst.

Härefter uppvisas, att ett rätt prisma, vars basyta är en rätvinklig triangel, kan genom två plan delas i tre lika stora tresidiga prismor; två av dessa hava nämligen samma basyta B och höjd h som prismat, och om i den tredje AC betraktas som höjd, så inses genast, att den är lika med en av de andra. En sådan pyramids volym blir således $\frac{Bh}{3}$. Genom att lägga planen på lämpligt sätt får man nämligen pyramider med en sidokant vinkelrät mot basytan (se figuren).

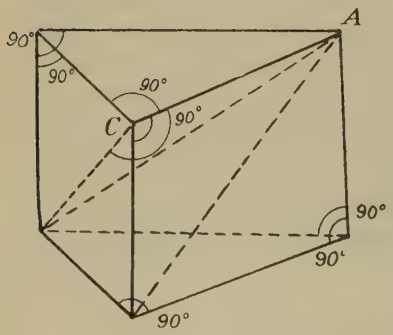


Fig. 1.

En tresidig pyramid med en sidokant vinkelrät mot basytan kan alltid förvandlas till en sådan, som har en vinkel i basytan rät. Denna åter kan fullbordas till ett rätt tresidigt prisma, varav den utgör en tredjedel. Basen må således vara vilken triangel som helst, så blir pyramidens volym $\frac{Bh}{3}$.

Går man nu till pyramider även med flera än tre sidoytor och för övrigt utan villkoret, att en sidokant skall vara vinkelrät mot basen, så kunna dessa med plan, lagda genom höjdlinjen och sidokanterna, uppdelas i tresidiga

pyramider, vilkas algebraiska summa är lika med den givna, och vilka alla hava en sidokant (höjden i den givna pyramiden) vinkelrät mot basytan. Då dessas volym kan beräknas med formeln $\frac{B\,h}{3}$, får man volymen av vilken pyramid som helst lika med $\frac{h}{3} \cdot \Sigma\, B$, eller $\frac{\text{basen} \times \text{höjden}}{3}$.

Nu kan satsen om det tresidiga sneda prismats delning i tre lika stora tresidiga pyramider bevisas, varav sedan fås, att dess volym är lika med basen × höjden.

Slutligen erhålles samma formel för vilket snett prisma som helst genom uppdelning i tresidiga prismor förmedelst plan lagda genom diagonalerna från ett och samma hörn i basytan och tillstötande sidokanter.

Aron Svensson.

Approximativ beräkning av kvadratrötter genom interpolation i kvadrattabell.

I skolan kan man vid vanlig lineär interpolation i kvadratrottabell av vanlig typ (med 3 decimaler) ägna föga uppmärksamhet åt det fel, som härflyter ur interpolationen, emedan själva utgångsvärdena äro behäftade med fel, som kunna överstiga »interpolationsfelen». Begagnar man däremot en tabell över de 1 000 första hela talens kvadrater, är det lätt att instänga den sökta kvadratroten mellan tvenne gränser, som här skall visas.

Antag, att man vill ha ett närmevärde för $x = \sqrt{a}$ med angivande av felet, och att $a_1 = b_1^2$, $a_2 = (b_1 + 1)^2$ äro de jämna heltalskvadrater (i tabellen), mellan vilka a ligger: $a_1 < a < a_2$. Punkterna $P_1(a_1,\ b_1)$, $P_2(a_2,\ b_1 + 1)$ ligga på parabeln $x = \sqrt{a}$ (fig. 2). Det approximativa värdet $\bar{x} = b_1 + \frac{a - a_1}{a_2 - a_1} \cdot 1$, som erhålles genom vanlig (enkel) interpolation, får man grafiskt genom att ersätta parabelbågen P_1P_2

med kordan P_1P_2. x *understiger* följaktligen det verkliga värdet x. Felet är $x - \bar{x}$. Det når för a-värden mellan a_1 och a_2 tydligen sitt maximum, då tangenten i (a, x) är $\| P_1P_2$. Enligt en känd parabelsats är då

$$x = \frac{b_1 + (b_1 + 1)}{2} = b_1 + \tfrac{1}{2}$$

och alltså $$a = (b_1 + \tfrac{1}{2})^2.$$

Tillhörande $$\bar{x} = b_1 + \frac{(b_1 + \frac{1}{2})^2 - b_1^2}{a_2 - a_1},$$

och maximifelet alltså

$$x - \bar{x} = \tfrac{1}{2} - \frac{b_1 + \frac{1}{4}}{a_2 - a_1} = \frac{a_2 - a_1 - 2b_1 - \frac{1}{2}}{2(a_2 - a_1)} =$$

$$= \frac{(b_1 + 1)^2 - b_1^2 - 2b_1 - \frac{1}{2}}{2(a_2 - a_1)} = \frac{1}{4(a_2 - a_1)}$$

så länge a ligger mellan a_1 och a_2.

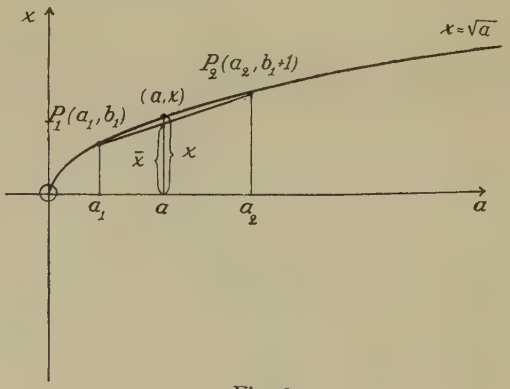


Fig. 2.

Vi ha således

$$\sqrt{a_1} + \frac{a - a_1}{a_2 - a_1} < \sqrt{a} \leqq \sqrt{a_1} + \frac{a - a_1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{4(a_2 - a_1)},$$

där likhetstecknet gäller endast för $a = (\sqrt{a_1} + \frac{1}{2})^2$.

Ex. $a = 97\,383$; $a_1 = 97\,344 = 312^2$, $a_2 = 97\,969 = 313^2$.

$a_2 - a_1 = 625$. Max.-felet $= 0{,}0004$.

$(a - a_1) : (a_2 - a_1) = 0{,}0624$.

Alltså $312{,}0624 < \sqrt{a} < 312{,}0628,$

$31{,}20624 < \sqrt{973{,}83} < 31{,}20628$ o. s. v.

Ännu skarpare resultat erhålles, om man först beräknar

$$3\sqrt{a} = \sqrt{876\,447}.$$

Man finner $936{,}18739 < 3\sqrt{a} < 936{,}18754$

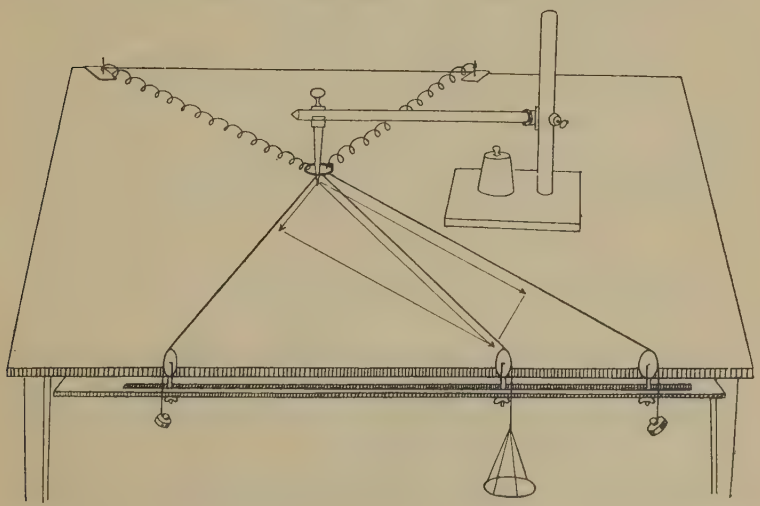
d. v. s. $312{,}06246 < \sqrt{a} < 312{,}06252$

och $\sqrt{a} = 312{,}0625 + f$, där $|f| < 0{,}00004.$

X.

Metod att demonstrera kraftparallellogrammen.

Följande sätt att experimentelt uppsöka resultanten till två krafter, som verka i samma punkt, äger den fördelen, att verkligen resultantens och ej »motresultantens» riktning och storlek direkt erhållas. Som fig. visar, är motvikten vid det



exempelvis i Moll beskrivna försöket ersatt med två fjädrar, vilka tillsamman med två vikter (t. ex. 50 och 100 gr.) hålla den lilla ringen i jämvikt; spänningarna i fjädrarna behöva ej uppmätas. Sedan jämviktsläget, som markeras av en metallspets, fäst i ett stadigt stativ och helst lätt nedtryckt i bordet, genom lätta knackningar uppnåtts, avlyftas vikterna och ringens förra jämviktsläge uppsökes på nytt genom dragning i det snöre (som alltså först nu påhakas) i vilket viktskålen är fäst, varefter den tillhörande trissan förskjutes och fästes i sitt riktiga läge och skålen belastas med erforderliga vikter. På ett ritpapper lagt under det hela, utritas därefter komposanter och resultant i riktiga proportioner, och slutligen konstrueras parallellogrammen. Elevernas glädje över att cirklarna skära varandra i resultantens spets är påfallande.

Stiften, på vilka fjädrarna hakas, äro fastlödda vid dubbelvikna metallbleck, som skjutas över bordskanten. Huru fjädrarna göras, är förut beskrivet i denna tidskrift. Metallspetsen genom ringen göres lätt av en förbrukad stativring. Trissor att fastskruva vid bordet finnas i marknaden. Enkla men fullt användbara trissor erhållas i järnaffärer, men i så fall måste de kompletteras med järnskruv och mutter, och bordet (se fig.) utökas med en träribba, med en springa för trissornas förflyttning. Förvaras slutligen alla smådelar i en särskild ask, är försöket snabbt uppmonterat. Metoden är beskriven i häfte 5, årgång 35 (1922) av Poskes tidskrift, men har av undertecknad i förenklingssyfte utformats på sätt, som ovan beskrivits.

A. Ling.

Kraftfältet omkring en rak, strömförande, metallisk ledare.

Härnedan skall redogöras för ett enkelt sätt att påvisa detta kraftfält. Av försöket kan även vissa slutsatser av kvantitativ natur dragas.

1. Jag släppte en ström på 17 amp. genom en tunn koppartråd med 0,5 mm diameter och släpade tråden i järnfilspån. Järnfilspånen fastnade i ett tjockt lager runt tråden, så att trådens skenbara diameter blev c:a 3,5 mm. Man kan tydligt se, hur kraftlinjerna gå i cirklar med tråden som medelpunkt. När strömmen slås ifrån, falla järnfilspånen ner.

2. Försöket upprepades med en koppartråd på 1 mm diameter och därefter en lika tjock tråd av mjukt järn. Strömmen som förut 17 amp. I båda fallen fastna järnfilspån, så att den skenbara diametern blir c:a 3,5 mm liksom i (1). Järntråden, som har ett stort motstånd, blir mycket varm. På de ställen, där den omgives av järnfilspån som ett skyddande hölje, blir temperaturen så hög, att järnfilspånen börja brinna. Sedan strömmen slagits ifrån, sitter den bildade järnoxid-oxidulen kvar som en sammanbakad massa. Kraftlinjernas cirkelformiga anordning ger intrycket av, att hela tråden är omspunnen med en finare järntråd.

Av dessa försök drager man slutsatsen, att kraftfältets styrka endast är beroende av strömstyrkan genom ledningstråden, men ej av motståndet (resp. spänningen) eller trådens ämne.

3. Till sist släppte jag samma strömstyrka genom en grov koppartråd (diametern 4 mm). *Nu fastnade alls ej något järnfilspån.* Därav drager jag slutsatsen, att kraftfältet även nu blir identiskt med kraftfälten i de föregående. Eftersom kraftfältet i de föregående fallen endast mäktade fasthålla järnfilspån till en skenbar diameter av 3,5 mm, så kan det icke fasthålla mer nu heller. Och när då tråden

själv är mer än 3,5 mm tjock, så fastnar intet alls. Man kan alltså säga, att kraftfältet i alla fallen utbildas så, som det skulle göra, om den ifrågavarande strömstyrkan passerade genom en oändligt tunn ledare i trådens mitt.

A. Frendel.

Med anledning av höstterminens studentskrivningar.

Uppgift 1 lydde: Vad är summan av de n första termerna i serien

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \ldots \; ?$$

Enklaste lösningen är att sammanslå termerna två och två. Resultatet blir då

$$-\frac{n}{2}, \text{ om } n \text{ ett jämnt tal,}$$

$$\frac{n+1}{2}, \text{ om } n \text{ ett udda tal.}$$

Båda svaren kunna sammanfattas t. ex. i formeln

$$\frac{1}{4} - \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)(-1)^n.$$

Till detta senare svar kan man komma genom att skriva serien sålunda

$$1 + 2 \cdot (-1) + 3(-1)^2 + \ldots + n(-1)^{n-1}$$

varvid ses att denna serie är ett specialfall av serien

$$a + (a + d)q + (a + 2d)q^2 + (a + 3d)q^3 \ldots$$

Sättes alltså

$$s_n = 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^2 + \ldots + n(-1)^{n-1}$$

fås

$$-s_n = \quad 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 + \ldots + (n-1)(-1)^{n-1} + n(-1)^n$$

och genom subtraktion

$$2s_n = 1+(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{n-1}-n\cdot(-1)^n$$

$$2s_n = \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} - n(-1)^n,$$

$$\therefore\ s_n = \frac{1}{4} - \left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)(-1)^n.$$

Andra sätt att skriva summan äro:

$$s_n = \frac{1}{4} - \left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos n\pi$$

$$s_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\sin^2\frac{n\pi}{2} - \frac{n}{2}$$

$$s_n = (-1)^{n+1}\,E\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

$\left(\text{Med } E\left(\frac{n}{a}\right) \text{ menas det största hela tal, som ingår i bråket } \frac{n}{a}.\right)$

Vår serie har egenskapen

$$s_{n+1} - s_n = (n+1)(-1)^n$$

men $$E\left(\frac{n+2}{2}\right)+E\left(\frac{n+1}{2}\right)=n+1$$

eller $$(-1)^{n+2}\,E\left(\frac{n+2}{2}\right)-(-1)^{n+1}\,E\left(\frac{n+1}{2}\right)=(n+1)(-1)^n,$$

varav slutes att $s_n = (-1)^{n+1}\,E\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

S. B—n.

Matematiska uppgifter.

133) Visa att $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ alltid är divisibelt med x^2+x+1, då n är ett helt tal.

134) Bevisa att

$$\operatorname{tg} 3v = \operatorname{tg} v\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+v\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-v\right). \qquad (M—r.)$$

135) Att upprita en triangel, då man känner två sidor och mellanliggande vinkels bissektris. (*Iter.*)

136) Uttryck höjden h_a i en triangel såsom en funktion av r och r_a. (*Iter.*)

137) Enckes komet har en omloppstid av 1 218 dygn. Ellipsens storaxel är 4,2 och dess lillaxel 2,4 jordbaneradier. Hur lång tid behöver kometen för att gå från sitt aphelium till den punkt, där för första gången dess avstånd från storaxeln är 0,6 jordbaneradier? (*M—r.*)

138) Tvärsnittet av ett rakt, obegränsat prisma är en liksidig triangel med sidan a. Man kan skära detta prisma med plan, vilkas sidor förhålla sig som 3, 4, 5 Huru stora äro sidorna i dessa trianglar? *X.*

Lösningar till uppg. i häft. 1. 1922—23.

121) *En person lyfte i en engelsk bank pengar på en check. Emellertid råkade kassören av misstag kasta om £ och Sh. På hemvägen gjorde han ett inköp för 2 Sh 6 d, och fann sedan vid hemkomsten, att han hade kvar jämnt dubbelt så mycket som checkens hela belopp. Hur stort var detta?* (1 £ = 20 Sh = 240 d.)

Om checken löd på x £ y Sh z d, där x, y, z äro hela tal och

$$x > 0,\ 20 > y \geqq 0,\ 12 > z \geqq 0,$$

får man ekvationen

$$240y + 12x + z - 30 = 2(240x + 12y + z)$$

eller

$$468x - 216y + z + 30 = 0,$$

eller genom div. med 36:

$$13x - 6y + \frac{z+30}{36} = 0.$$

Alltså $z=6$ och $y=2x+\frac{x+1}{6}$, varav $x=6t-1$, $y=13t-2$.
Här duger endast $t=1$. Således checkens belopp 5 £ 11 Sh 6 d.
(*X, Iter.*)

122) *Inom vilket område får h ligga för att bråket*

$$\frac{x^2-hx+1}{x^2+x+1}$$

för alla reella x-värden skall ligga mellan $+3$ *och* -3*?*

Vi sätta uttrycket

$$y=\frac{x^2-hx+1}{x^2+x+1}=1-\frac{(h+1)x}{x^2+x+1}=1-\frac{h+1}{x+\frac{1}{x}+1},$$

men då $x+\frac{1}{x}-2=\frac{(x-1)^2}{x}$, så inses att för $x>0$ är $x+\frac{1}{x}>2$, och omedelbart inses att $x+\frac{1}{x}-2$ för $x<0$ är <-2.

Vi få därför att

$$\text{för } x>0 \quad \text{är } y>\frac{2-h}{3}$$

$$\text{» } x<0 \quad \text{» } y<h+2$$

y har således sitt värdeförråd (för reella x) mellan dessa två gränser.

För att intervallet $-3 \rightarrow +3$ skall innesluta detta intervall, fordras att

a) $-3<h+2<3$ d. v. s. $-5<h<1$

b) $-3<\frac{2-h}{3}<3$ d. v. s. $-7<h<11$,

vilket senare villkor ingår i *a*). Detta villkor *a*) innefattar således det begärda nödvändiga och tillräckliga kriteriet.
X.

Man kan även genom att lösa ekvationen få

$$x=\frac{y+h\pm\sqrt{(h+2-y)(h-2+3y)}}{2(1-y)},$$

varav synes, att extremvärdena för y äro $h+2$ och $\frac{2-h}{3}$, och lätt inses att kurvan är belägen mellan desamma, vilket av dem än är max. och min. Sedan förfares som ovan.

(*Iter.*)

123) *Sök orten för normalens från medelpunkten fotpunkt på en rörlig ellipskorda, som synes under rät vinkel från medelpunkten.*

I. Om A_1 är medelpunkten och B_1 och C_1 kordans skärningspunkter med ellipsen, så är $A_1B_1C_1$ en rätvinklig triangel, vars höjd kallas h och sidor a_1, b_1, c_1. Då är

$$h=\frac{b_1c_1}{\sqrt{b_1^2+c_1^2}}, \text{ således } \frac{1}{h^2}=\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2}.$$

Men b_1 och c_1 äro radier i ellipsen. Om då den enas vinkel med storaxeln a kallas φ och den andras således $\frac{\pi}{2}+\varphi$, så fås omedelbart ur ellipsens ekvation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ eller } \frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2}=1,$$

att $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2}=\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\cos^2\varphi}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$.

h är således konstant och har värdet $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Orten är således en cirkel med A till medelpunkt och denna radie.

II. Om ellipsens ekvation är $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ och kordans $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, så betyder ekvationen

$$p^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2$$

en kurva, som går genom kordans skärningspunkter med ellipsen och dessutom genom origo. Men den är en homo-

gen andragradsekvation, och framställer således två räta linjer, således de båda radierna till skärningspunkterna, då en godtycklig punkt på kordan ej kan satisfiera densamma. Men hyfsas denna ekvation och göres till en ekvation i $\frac{y}{x}$, så ses genast, att de båda rötternas produkt blir $\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{p^2 - a^2 \cos^2 \alpha}{p^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$, d. v. s. detta skall vara produkten av radiernas vinkelkoefficienter. Men då de äro vinkelräta mot varandra, skall denna produkt vara $= -1$. Vi få då avståndet från origo

$$p = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

»*X*» och »*Iter*».

Satsen kan generaliseras i tvenne riktningar:

I. *Ellipsen kan ersättas med ett godtyckligt kägelsnitt.*

$$(K): \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

och medelpunkten med det rätvinkliga koordinatsystemets origo O.

Den rörliga kordan L, som skär K i A och B må ha ekv.

$$(L): \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Normalen mot L genom O har då fotpunkten

$$X = p \cos \alpha, \quad Y = p \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ekv. (1) skrives nu i stället

$$p^2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + p^2(2Dx + 2Ey) + Fp^2 = 0 \quad (4)$$

Samtidigt med (1) och (2) gäller då

$$\varphi(x_1 y) = p^2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) +$$
$$+ p(2Dx + 2Ey)(x \cos \alpha + y \sin \alpha) +$$
$$+ F(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ekv. (5), som är homogen, betyder de bägge linjerna OA,

OB. För att dessa skola vara vinkelräta fordras att summan av koeff. för x^2 och y^2 i (5) försvinner. Alltså få vi enl. (3) som ort för fotpunkten

$$(\overline{K}): \quad (A + C)(X^2 + Y^2) + 2DX + 2EY + F = 0$$

d. v. s. *en cirkel eller rät linje.* Enveloppen för L är följaktligen i allmänhet ett kägelsnitt med en brännpunkt i O. Av specialfall annotera vi följande allmänna typer:

1. $F \neq 0$. K och $\overline{K}$ gå ej genom O. Om $A + C = 0$, i vilket fall K är en liksidig hyperbel eller två vinkelräta linjer, reducerar sig $\overline{K}$ till en rät linje och L:s envelopp är en parabel.

2. $F = 0$. Då gå K och $\overline{K}$ genom origo och tangera varandra där. Enveloppen reducerar sig till O och den diametralt motsatta punkten på $\overline{K}$ (den s. k. Fregierska punkten). Är $A + C = 0$, äro alla L parallella. X.

II. Den allmänna uppgiften att bestämma orten för fotpunkten av medelpunktsperpendikeln mot en rörlig korda som från medelpunkten synes under en given vinkel ω ($\operatorname{tg} \omega = \mu$) kan lösas på följande sätt. Låt (r, φ) vara koordinaterna för kordans ena ändpunkt. Medelpunktsperpendikelns fotpunkt ligger då på en över r såsom diameter uppritad cirkel

$$x^2 + y^2 - r(x \cos \varphi + y \sin \varphi) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

eller, om värdet på r införes,

$$x^2 + y^2 - \frac{ab(x \cos \varphi + y \sin \varphi)}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = 0.$$

Denna ekv. lösa vi i avseende på φ. För detta ändamål överflyttas sista termen till högra membrum, då man efter kvadrering, bortskaffande av nämnaren och division med $\cos^2 \varphi$ erhåller

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{2b^2xy}{(x^2 + y^2)^2 - b^2y^2} \operatorname{tg} \varphi + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2}{(x^2 + y^2)^2 - b^2y^2} = 0. \quad (7)$$

Ekv. (7) visar, att mellan x, y och φ en sådan relation äger rum, att mot varje punkt (x, y) på den sökta kurvan svara två värden på $\operatorname{tg}\varphi$, nämligen vinkelkoefficienterna för de båda radierna till kordans ändpunkter. Vi behöva således endast bestämma de båda rötterna λ, λ_1 till (7) på sådant sätt. att nämnda radier innesluta den givna cirkeln ω. Villkoret härför är

$$\mu^2 = \left(\frac{\lambda - \lambda_1}{1 + \lambda\lambda_1}\right)^2 = \frac{(\lambda + \lambda^1)^2 - 4\lambda\lambda_1}{(1 + \lambda\lambda_1)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Insättas de ur (7) erhållna uttrycken för rötternas summa och produkt i (8), erhålles ekv. för den sökta orten

$$4a^2b^2[a^2x^2 + b^2y^2 - (x^2 + y^2)^2] =$$
$$= \mu^2[(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - a^2b^2]^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

»*Iter*».

124) *Uttryck vinkeln vid spetsen i en likbent triangel såsom funktion av de inskrivna och omskrivna cirklarnas radier.*

Kallas de lika stora sidorna i triangeln a och basen b, har man, med användande av de brukliga beteckningarna,

$$r = \tfrac{1}{2}b \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha, \quad 2R = \frac{a}{\sin\alpha},$$

varav

$$\frac{r}{2R} = \frac{b}{2a}\sin\alpha \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \cos\alpha \sin\alpha \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$= 2\cos\alpha \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \cos\alpha(1 - \cos\alpha),$$

således

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta = \cos\alpha = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2r}{R}}\right).$$

Såsom redan a priori inses, är β tydligen beroende endast av förhållandet $\frac{r}{R}$. Mot varje värde på $\frac{r}{R}$ inom intervallet $\frac{1}{2} \geqq \frac{r}{R} \geqq 0$ svara i allmänhet två värden på β ($\beta \leqq \pi$). En-

dast för den liksidiga triangeln ($R = 2r$) saknas en dylik motsvarighet (trianglarna sammanfalla).

Uppgiften kan även lösas med tillhjälp av den bekanta formeln

$$\frac{r}{R} = 4 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sin \tfrac{1}{2}\beta \cdot \sin \tfrac{1}{2}\gamma .$$

För $\gamma = \alpha$ erhålles då omedelbart

$$\frac{r}{2R} = \cos \alpha (1 - \cos \alpha) = \sin \tfrac{1}{2}\beta (1 - \sin \tfrac{1}{2}\beta). \quad . \quad (1)$$

Sättes $\sin^2 \varphi = \frac{2r}{R}$ (φ en spetsig vinkel), erhålles genom en enkel transformation

$$\sin \tfrac{1}{2}\beta = \begin{cases} \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi , \\ \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi . \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

För att få en överblick över variationen av $\sin \frac{1}{2}\beta$ för vilka värden på $\frac{r}{R}$ kan man införa beteckningarna

$$\begin{cases} x = \frac{r}{R} , \\ y = \sin \tfrac{1}{2}\beta . \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ur (1) erhålles då genom en enkel transformation

$$(y - \tfrac{1}{2})^2 = -\tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Om värdena på $\frac{r}{R}$ avsättas såsom abskissor och motsvarande värden på $\sin \frac{1}{2}\beta$ såsom ordinator, erhålles således en parabel, som har sin topp i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ och skär y-axeln i (0, 0) och (0, 1). Tages origo till medelpunkt för en enhetscirkel, kunna även vinklarna β lätt konstrueras ur värdet på $\frac{r}{R}$. Den till vänster om y-axeln liggande delen av parabeln svarar mot de med negativt tecken införda värdena på $\frac{r_b}{R}$. Likasom $\frac{r}{R}$ har ett maximivärde ($= \frac{1}{2}$), har även

$\frac{r_b}{R}$ ett maximivärde ($=4$). Det förra uppkommer, när triangeln är liksidig, det senare vid triangelns övergång i en rät linje.

Formel (1) kan även läggas till grund för följande enkla geometriska konstruktion:

Det begäres att upprita en likbent triangel, då man känner de inskrivna och omskrivna cirklarnas radier.

Den sökta triangeln vare ABC ($AB = BC$). Höjden mot AC utdrages, tills den skär den kring triangeln omskrivna cirkeln i D. Om då höjden i triangeln ADC (mot AC) betecknas med z, så är, med användning av i övrigt samma beteckningar som förut, $z = 2R \sin^2 \frac{1}{2}\beta$, således $\sin \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{z}{2R}}$. Insättes detta värde på $\sin \frac{1}{2}\beta$ i (1), erhålles efter en enkel transformation $z^2 - 2(R - r)z + r^2 = 0$. . . . . (5)

Den sökta längden z erhålles således, om radiernas dubbla skillnad (diametrarnas skillnad) delas i två delar, vilkas medelproportional $= r$ (jfr lösningen av samma uppgift i denna tidskr. 1 årg., uppg. 4).

»*Iter*».

(Även löst av *X*.)

125) *A, B, C, D äro i ordning 4 punkter på en rät linje. När finnes en punkt, från vilken AB, BC och CD synas under lika vinklar?*

Kallas AB, BC och CD för a, b, c resp., så är villkoret att de båda harmoniska cirklarna, som dela resp. AC i förhållandet $a : b$ och BD i förhållandet $b : c$ skola skära varandra.

Tages A till origo och $ABCD$ till x-axel, så att x-koordinaterna för A, B, C, D bliva resp. 0, a, $a+b$, $a+b+c$, så är koordinaten x för den 4:e harmoniska punkten till A, B, C: . . . . . $x = a \cdot \frac{a+b}{a-b} = \frac{a^2+ab}{a-b}$,

och för den 4:e harm. punkten till B, C, D: . . . $x_1 = \frac{ab - ac + b^2 + bc}{b - c}$.

Koordinaten för den första cirkelns medelpunkt: . . $z_1 = \frac{x+a}{2} = \frac{a^2}{a-b}$,

och för den andra cirkelns medelpunkt: . . . . . $z_2 = \frac{x_1+a+b}{2} = \frac{ab+b^2-ac}{b-c}$.

Den första cirkelns radie blir: $r_1 = |z_1 - a| = \left|\frac{ab}{a-b}\right|$,

» andra » » » : $r_2 = |z_2 - a - b| = \left|\frac{bc}{b-c}\right|$.

Villkoret blir således

$$r_1 - r_2 \leqq z_1 - z_2 \leqq r_1 + r_2 \quad \left|\begin{array}{l}\text{likhetstecknen}\\ \text{svara blott mot}\\ \text{vinklar} = 0\end{array}\right.$$

eller $\pm\left\{\left|\frac{c}{b-c}\right| - \left|\frac{a}{a-b}\right|\right\} \leqq \left|\frac{ac-b^2}{(a-b)(b-c)}\right| \leqq \left|\frac{c}{b-c}\right| + \left|\frac{a}{a-b}\right|$.

Dessa olikheter kunna nu diskuteras, och olika fall fås allteftersom $a-b$, $b-c$, $ac-b^2$ och $\left|\frac{c}{b-c}\right| - \left|\frac{a}{a-b}\right|$ äro positiva eller negativa. Att upptaga en sådan diskussion skulle föra oss för långt.

(Löst och diskuterat av »*X*» och »*Iter*».)

126) *Om cirklar uppritas på en fyrhörnings sidor som diametrar och likaledes på den linje som förenar diagonalernas mittpunkter, så är summan av en godtycklig punkts potenser med avseende å de förstnämnda cirklarna lika med 4 gånger samma punkts potens med avseende å den sistnämnda.*

En punkts potens med avseende å en given cirkel är kvadraten på linjen till medelpunkten minskad med kvadraten på radien.

Om således en linjes ändpunkter i ett rätvinkligt koordinatsystem äro (x_1, y_1) och (x_2, y_2), så är potensen av punkten (x, y) med avseende å den cirkel som har linjen till diameter:

$$P=\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2-\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2=$$

$$=x^2+y^2-x(x_1+x_2)-y(y_1+y_2)+x_1x_2+y_1y_2 \quad . \quad . \quad (1)$$

Antagas nu fyrhörningens spetsar hava koordinaterna (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) och (x_4, y_4), så inses genast, att man får summan av potenserna med avseende å cirklarna på sidorna

$$S=4(x^2+y^2-2x\Sigma x_1-2y\Sigma y_1+\Sigma x_nx_r+\Sigma y_ny_r \quad . \quad . \quad (2)$$

Den sistnämnda linjen har ändpunkterna $\left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right)$ och $\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$, varför ur (1) följer att punktens (x, y) potens med avseende å cirkeln på denna linje är:

$$P_1=x^2+y^2-\frac{x}{2}\Sigma x_r-\frac{y}{2}\Sigma y_r+$$

$$+\frac{(x_1-x_3)(x_2+x_4)}{4}+\frac{(y_1-y_3)(y_2+y_4)}{4} \quad . \quad . \quad (3)$$

varav ses genom jämförelse av (2) och (3), att $S=4P$.

Anm. Fyrhörningen behöver ej vara plan, utan kan den likaväl bestämmas av spetsarna i en tetraeder, och cirklarna ersättas då med sfärer. Såsom ett specialfall härav fås då uppgift 112 denna tidskr. årg. 5, sid. 187 (lösn. årg. 6, sid. 52). Se för övrigt uppsatsen av Aug. Sörensen (»Iter») i detta häfte.

(Löst av »*X*» och »*Iter*».)

Rättelser.

I andra häftet av denna årgång (Lindborgs uppsats):

Sid. 82 rad 9 uppifr. står $p=17$. Bör vara $p_7=17$.

» 82 » 19 » » »äro ju relativa primtal till alla tal fr. o. m....» Bör vara: »äro ju de relativa primtalen till de tre första primtalen i området fr. o. m....»

» 90 » 8 » » $+k\sum_{\mu=1}^{\delta_d}\delta_\mu$. Bör vara $+k\sum_{\mu=1}^{d}\delta_\mu$.

» 93 » 9 » » $-\frac{\delta^n(\delta_d+2d-3)}{2}$. Bör vara $-\frac{\delta_d(\delta_d+2d-3)}{2}$.

» 94 » 1 nedifr. » $+k\sum_{\mu=1}^{\delta_d}\delta_\mu$. Bör vara $+k\sum_{\mu=1}^{d}\delta_\mu$.

Rekurrenta serier av andra ordningen.

Av KARL BLIX.

I. Allmänna teorier.

En rekurrent serie[1]

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

säges vara av andra ordningen, om dess skala är $A_n = 2aA_{n-1} - bA_{n-2}$, där a och b äro godtyckliga konstanter $\gtrless 0$. Dessa serier erbjuda stort intresse ej minst i talteoretiskt hänseende och ha varit föremål för undersökningar av Siebeck (1846) och E. Lucas (1878).

Är $A_0 = 0$ och $A_1 = 1$ kallas (1) en fundamentalserie. Vi beteckna den i det följande med

$$U_0 + U_1x + U_2x^2 + \ldots + U_nx^n + \ldots, \text{ där } U_0 = 0,\ U_1 = 1 \quad (2)$$

Dess genererande bråk är $\dfrac{x}{1 - 2ax + bx^2}$. För erhållandet av den allmänna termen U uppdelas det genererande bråket i partialbråk. För den skull sättes $1 - 2ax + bx^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$, där alltså

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2a \\ \alpha\beta &= b \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

α och β äro alltså rötter till ekv. $y^2 - 2ay + b = 0$ med diskriminanten $4\triangle = (2a)^2 - 4b$ och alltså

$$\triangle = a^2 - b \quad \ldots \quad (4)$$

Här ha vi att skilja mellan två fall:

1. $\triangle = a^2 - b = 0$, då alltså $\alpha = \beta = a$. Då blir vid partialbråksuppdelningen

[1] Om rekurrenta serier, se årg. 4, sid. 69.

$$\frac{x}{1-2ax+bx^2}=\frac{x}{(1-ax)^2}=\frac{c_1}{(1-ax)^2}+\frac{c_2}{1-ax}=$$

$$=\frac{c_1+c_2-c_2ax}{(1-ax)^2}\quad\begin{matrix}\because\ c_1+c_2=0\\ -c_2a=1\end{matrix}\Big\}\ \text{och}\quad\begin{matrix}c_1=\frac{1}{a}\\ c_2=-\frac{1}{a}\end{matrix}\Big\}$$

$$\because\ \frac{x}{1-2ax+bx^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(1-ax)^2}-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-ax}$$

och alltså $U_n=\frac{1}{a}\cdot(n+1)a^n-\frac{1}{a}\cdot a^n=na^{n-1}\ldots\ldots\ldots(5)$

Är alltså $b=a^2$, blir serien den aritmetisk-geometriska. Är speciellt $a=b=1$, blir serien 0, 1, 2, 3, 4, o. s. v.

2. $\triangle=a^2-b\gtrless 0$. Då blir vid partialbråksuppdelningen

$$\frac{x}{1-2ax+bx^2}=\frac{c_1}{1-\alpha x}+\frac{c_2}{1-\beta x}=\frac{c_1-c_1\beta x+c_2-c_2\alpha x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

$$\because\ \begin{matrix}c_1+c_2=0\\ -c_1\beta-c_2\alpha=1\end{matrix}\Big\}\ \because\ \begin{matrix}c_1=\frac{1}{\alpha-\beta}\\ c_2=-\frac{1}{\alpha-\beta}\end{matrix}\Big\}$$

eller om $\alpha-\beta=\delta$, $\frac{x}{1-2ax+bx^2}=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{1-\beta x}$

och alltså $U_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\delta}$ (I),

där α och β äro rötter till ekv. $y^2-2ay+b=0$ och $\delta=\alpha-\beta$.

I det följande förutsätta vi, att $\triangle\gtrless 0$.

Återgå vi till den generellare serien (1), så kan dess allmänna term lätt beräknas ur (2). Är nämligen seriens (1) genererande bråk

$$\frac{a_0+a_1x}{1-2ax+bx^2}=\frac{c_1}{1-\alpha x}+\frac{c_2}{1-\beta x},$$

så blir $A_n=c_1\alpha^n+c_2\beta^n$ och för $n=0$ och 1

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= c_1 + c_2 \\ A_1 &= c_1\alpha + c_2\beta \end{aligned}\right\}, \quad \text{varur fås} \quad \left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{A_1 - A_0\beta}{\delta} \\ c_2 &= -\frac{A_1 - A_0\alpha}{\delta} \end{aligned}\right\}$$

och alltså

$$A_n = \frac{A_1\alpha^n - A_0\beta\alpha^n - A_1\beta^n + A_0\alpha\beta^n}{\delta} =$$

$$= A_1 \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\delta} - A_0 \cdot \alpha\beta \cdot \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\delta} = A_1U_n - A_0bU_{n-1} \quad (6)$$

Liksom U-serien (2), vars två första termer äro 0 och 1, så spelar även den serie, vars två första termer äro 1 och a, en framträdande roll. Vi beteckna dess koefficienter med V, och serien blir då

$$V_0 + V_1x + V_2x^2 + \ldots + V_nx^n + \ldots,$$

där $$V_0 = 1, \quad V_1 = a \ldots\ldots\ldots (7)$$

Enligt (6) blir då

$$V_n = aU_n - bU_{n-1} \ldots\ldots\ldots (8)$$

eller med hänsyn till (3) och (I)

$$V_n = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\delta} - \alpha\beta \cdot \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\delta} =$$

$$= \frac{\alpha^{n+1} - \beta\alpha^n + \alpha\beta^n - \beta^{n+1}}{2\delta} = \frac{\alpha^n(\alpha - \beta) + \beta^n(\alpha - \beta)}{2(\alpha - \beta)} =$$

$$= \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \quad \text{(II)}.$$

Dessa båda tal $U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\delta}$ (I) och $V_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ (II) skola bli föremål för vår undersökning, varvid vi måste fasthålla, att

1) $$\begin{cases} U_n = 2aU_{n-1} - bU_{n-2} \ldots\ldots (9\,a) \\ V_n = 2aV_{n-1} - bV_{n-2} \ldots\ldots (9\,b) \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} U_0 = 0; \quad U_1 = 1 \quad (10\,a) \\ V_0 = 1; \quad V_1 = a \quad (10\,b) \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \alpha + \beta = 2a \ldots (11\,a) \\ \alpha\beta = b \ldots (11\,b) \end{cases}$$

4) $\delta = \alpha - \beta$ (12 a) och 5) $\triangle = a^2 - b = \dfrac{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}{4} =$

$$= \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \gtrless 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,b)$$

Vidare äro V_n och U_n förbundna med varandra genom (8), som även kan skrivas $V_n = 2aU_n - bU_{n-1} - aU_n$, eller enligt (9 a)

$$V_n = U_{n+1} - aU_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

och om U_{n+1} elimineras mellan:

$$\begin{cases} V_{n+1} = aU_{n+1} - bU_n \\ V_n \;\; = \;\; U_{n+1} - aU_n \end{cases},$$

fås $$\triangle U_n = V_{n+1} - aV_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Enligt (I) och (II) är

$$\begin{cases} \alpha^n - \beta^n = \delta U_n \\ \alpha^n + \beta^n = 2V_n \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^n = V_n + \dfrac{\delta}{2} U_n \quad . \quad . \quad (15\,a) \\ \beta^n = V_n - \dfrac{\delta}{2} U_n \quad . \quad . \quad (15\,b) \end{cases}$$

och genom multiplikation med hänsyn tagen till (11 b) och (12 b)

$$V_n^2 - \triangle U_n^2 = b^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Multipliceras (15 a) och (15 b) med resp.

$$\begin{cases} \alpha^m = V_m + \dfrac{\delta}{2} U_m \\ \beta^m = V_m - \dfrac{\delta}{2} U_m \end{cases},$$

fås

$$\begin{cases} \alpha^{m+n} = V_m V_n + \triangle U_m U_n + \dfrac{\delta}{2}(U_m V_n + V_m U_n) \\ \beta^{m+n} = V_m V_n + \triangle U_m U_n - \dfrac{\delta}{2}(U_m V_n + V_m U_n) \end{cases}$$

och genom subtraktion och addition med hänsyn tagen till (I) och (II)

$$U_{m+n} = U_m V_n + V_m U_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

$$V_{m+n} = V_m V_n + \triangle U_m U_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

Dessa båda märkliga formler kallas »additionsteoremen för rekurrenta serier av andra ordningen». De gälla för alla positiva heltalsvärden på m och n. Att de gälla även om m eller n eller både m och n äro $= 0$, synes omedelbart. För att utsträcka deras giltighet även till negativa heltalsvärden på m och n måste U- och V-serierna utsträckas åt motsatt håll mot förut:

$$\ldots + U_{-n}x^{-n} + \ldots + U_{-2}x^{-2} + U_{-1}x^{-1} + U_0 + U_1x^1 + + U_2x^2 + \ldots + U_nx^n + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,a)$$

$$\ldots + V_{-n}x^{-n} + \ldots + V_{-2}x^{-2} + V_{-1}x^{-1} + V_0 + V_1x + + V_2x^2 + \ldots + V_nx^n + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,a)$$

För dessa serier böra rekursionsformlerna (9) äga giltighet även för negativa n-värden. Detta inträffar, om man definierar

$$U_{-n} = -\frac{U_n}{b^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

och

$$V_{-n} = \frac{V_n}{b^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

ty då blir

$$2aU_{-n-1} - bU_{-n-2} = -2a \cdot \frac{U_{n+1}}{b^{n+1}} + b \cdot \frac{U_{n+2}}{b^{n+2}} =$$

$$= \frac{-2aU_{n+1} + U_{n+2}}{b^{n+1}} = \frac{-2aU_{n+} + 2aU_{n+1} - bU_m}{b^{n+1}} = -\frac{U_n}{b^n} = U_{-n}$$

och

$$2aV_{-n-1} - bV_{-n-2} = 2a \cdot \frac{V_{n+1}}{b^{n+1}} - b \cdot \frac{V_{n+2}}{b^{n+2}} =$$

$$= \frac{2aV_{n+1} - V_{n+2}}{b^{n+1}} = \frac{2aV_{n+1} - 2aV_{n+1} + bV_n}{b^{n+1}} = \frac{V_n}{b^n} = V_{-n}.$$

Tillämpas def. (17) och (18) på (III) och (IV) fås:

$$U_{m-n} = \frac{U_mV_n - V_mU_n}{b^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III a})$$

$$V_{m-n} = \frac{V_mV_n - \triangle U_mU_n}{b^n} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{IV a})$$

Vidare är $$U_{mn} = \frac{(\alpha^n)^m - (\beta^n)^m}{\delta} =$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[\left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{2}\right)^m - \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2} - \frac{\alpha^n - \beta^n}{2}\right)^m\right] =$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[\left(V_n + \frac{\delta}{2} U_n\right)^m - \left(V_n - \frac{\delta}{2} U_n\right)^m\right] =$$

$$= \frac{m}{1} \cdot V_n^{m-1} U_n + \triangle \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} V_n^{m-3} U_n^3 +$$

$$+ \triangle^2 \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} V_n^{m-5} U_n^5 + \ldots \quad (19)$$

och

$$V_{mn} = \frac{1}{2}\left[\left(V_n + \frac{\delta}{2} U_n\right)^m + \left(V_n - \frac{\delta}{2} U_n\right)^m\right] =$$

$$= V_n^m + \triangle \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} V_n^{m-2} U_n^2 +$$

$$+ \triangle^2 \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot V_n^{m-4} U_n^4 + \ldots \quad (20)$$

För $n = 1$ blir $U_n = 1$ och $V_n = a$ och alltså

$$U_m = \frac{m}{1} \cdot a^{m-1} + \triangle \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{m-3} +$$

$$+ \triangle^2 \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^{m-5} + \ldots \quad (21)$$

$$V_m = a^m + \triangle \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{m-2} +$$

$$+ \triangle^2 \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^{m-4} + \ldots \quad (22)$$

Ur (19) och (20) erhålles:

$$V_{mn} \pm \sqrt{\triangle}\, U_{mn} = (V_n \pm \sqrt{\triangle}\, U_n)^m \quad (23)$$

och för $n = 1$

$$V_m \pm \sqrt{\triangle}\, U_m = (a \pm \sqrt{\triangle})^m = \left(a \pm \frac{\delta}{2}\right)^m = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \pm \frac{\alpha - \beta}{2}\right)^m$$

och alltså

$$\begin{cases} V_m + \sqrt{\triangle}\, U_m = \alpha^m & \text{(24 a)} \\ V_m - \sqrt{\triangle}\, U_m = \beta^m & \text{(24 b)} \end{cases}$$

Utom dessa mer fundamentala formler kan man härleda en mängd andra. Som övningsexempel må följande anföras: 1) $U_{2n} = 2U_n V_n$; 2) $U_{2n+1} = 2U_{n+1}V_n - b^n$; 3) $V_{2n} = 2V_n^2 - b^n$; 4) $V_{2n+1} = 2V_{n+1}V_n - ab^n$; 5) $U_n V_{n-1} - U_{n-1}V_n = b^{n-1}$; 6) $U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} = b^{n-1}$; 7) Om $T_n = \frac{U_n}{V_n}$, så är $T_{m\pm n} = \frac{T_m \pm T_n}{1 \pm \triangle T_m T_n}$.

II. Tillämpningar.

1. Insättes $\alpha = n\varphi$ och $\beta = (n-2)\varphi$ i formeln:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

fås: $\sin n\varphi = 2\cos\varphi \cdot \sin(n-1)\varphi - \sin(n-2)\varphi$,

och alltså är serien

$$x + \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}x^2 + \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}x^3 + \frac{\sin 4\varphi}{\sin\varphi}x^4 + \ldots$$

en fundamentalserie med skalan $U_n = 2\cos\varphi \cdot U_{n-1} - U_{n-2}$ och allmänna termen

$$U_n = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Här är alltså $a = \cos\varphi$; $b = 1$, $\triangle = a^2 - b = -\sin^2\varphi$. Vidare är enligt (8)

$$V_n = \frac{\cos\varphi \cdot \sin n\varphi - \sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi} = \cos n\varphi \quad \ldots \quad (26)$$

Betecknas $m\varphi = \alpha$ och $n\varphi = \beta$, får man, då man insätter (25) och (26) i (16): $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$; i (17): $\sin(-\beta) = -\sin\beta$; i (18): $\cos(-\beta) = \cos\beta$; i (III) och

(III a): $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$; i (IV) och (IV a): $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$; i (19):

$$\sin m\beta = \frac{m}{1}\cos^{m-1}\beta\sin\beta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{m-3}\beta\sin^3\beta + \\ + \frac{m\ldots(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cos^{m-5}\beta\sin^5\beta - \ldots;$$

i (20): $$\cos m\beta = \cos^m\beta - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos^{m-2}\beta\cdot\sin^2\beta + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{m-4}\beta\cdot\sin^4\beta - \ldots;$$

i (23): $$\cos m\beta \pm i\sin m\beta = (\cos\beta \pm i\sin\beta)^m.$$

Att observera är, att denna Moivres formel ej har använts för härledningen av de båda föregående formlerna.

2. Om i (11 a, b) $\alpha = e^{\varphi}$ och $\beta = e^{-\varphi}$, där e är det naturliga logaritmsystemets bas, så blir $a = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$, $b = 1$, $\delta = e^{\varphi} - e^{-\varphi}$, $\triangle = \left(\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}\right)^2$, $U_n = \frac{e^{n\varphi} - e^{-n\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}$ och $V_n = \frac{e^{n\varphi} + e^{-n\varphi}}{2}$. Men nu är sinus hyperbolicus $\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$ och cosinus hyperbolicus $\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$, och alltså blir under de gjorda förutsättningarna $U_n = \frac{\mathrm{Sin}\,n\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$, $V_n = \mathrm{Cos}\,n\varphi$, $\triangle = \mathrm{Sin}^2\varphi$.

Betecknas $m\varphi = \alpha$ och $n\varphi = \beta$, erhålles vid insättning i (16): $\mathrm{Cos}^2\beta - \mathrm{Sin}^2\beta = 1$; i (17): $\mathrm{Sin}(-\beta) = -\mathrm{Sin}\,\beta$; i (18): $\mathrm{Cos}(-\beta) = \mathrm{Cos}\,\beta$; i (III) och (III a): $\mathrm{Sin}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta \pm \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta$; i (IV) och (IV a): $\mathrm{Cos}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta \pm \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta$; i (19): $\mathrm{Sin}\,m\beta = \frac{m}{1}\mathrm{Cos}^{m-1}\beta\cdot\mathrm{Sin}\,\beta +$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mathrm{Cos}^{m-3}\beta\cdot\mathrm{Sin}^3\beta +$$

$$+\frac{m\ldots(m-4)}{1\cdot\ldots 5}\operatorname{Cos}^{m-5}\beta\operatorname{Sin}^5\beta+\ldots;\quad \text{i (20):}\quad \operatorname{Cos} m\beta=$$

$$=\operatorname{Cos}^m\beta+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\operatorname{Cos}^{m-2}\beta\cdot\operatorname{Sin}^2\beta+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\operatorname{Cos}^{m-4}\beta\cdot\operatorname{Sin}^4\beta+\ldots$$

I följande fyra serier äro de 11 första termerna utskrivna.

	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fermats serier	U_n	0	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1 023
	$2\cdot V_n$	2	3	5	9	17	33	65	129	257	513	1 025
Fibonaccis serier	U_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
	$2\cdot V_n$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
Pells serier	U_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2 378
	V_n	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1 393	3 363
Pells konjugatserier	U_n	0	1	2	1	−4	−11	−10	13	56	73	−22
	V_n	1	1	−1	−5	−7	1	23	43	17	−95	−246

3. I Fermats serier är

$$a=\frac{3}{2},\quad b=2\therefore\triangle=\frac{1}{4},\quad \alpha=2,\quad \beta=1,\quad \delta=1.$$

4. I Fibonaccis serier är

$$a=\frac{1}{2},\quad b=-1\therefore\triangle=\frac{5}{4},\quad \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad \delta=\sqrt{5}.$$

5. I Pells serier är

$$a=1,\quad b=-1\therefore\triangle=2,\quad \alpha=1+\sqrt{2},\quad \beta=1-\sqrt{2},\quad \delta=2\sqrt{2}.$$

6. I Pells konjugatserier är

$$a=1,\quad b=3\therefore\triangle=-2,\quad \alpha=1+i\sqrt{2},\quad \beta=1-i\sqrt{2},$$

$$\delta=2i\sqrt{2}.$$

III. Några talteoretiska satser beträffande fundamentalserien.

I det följande förutsättes, att $2a$ och b äro *hela* tal $\left(\gtrless 0\right)$, som äro *relativa primtal*, d. v. s. sakna annan gemensam faktor än 1.

Sats 1. U_{n+1} och U_n äro relativa primtal.

Bevis. Antag, att U_{n+1} och U_n ha en gemensam primfaktor p. Enligt (9 a) är $U_{n+1} = 2aU_n - bU_{n-1}$, och då p ingår som faktor i både U_{n+1} och U_n, måste p även ingå som faktor antingen i b eller i U_{n-1} eller i både b och U_{n-1}. Men p kan ej ingå som faktor i b utan att även samtidigt ingå som faktor i U_{n-1}, ty är p gemensam primfaktor till U_n och b, så måste, på grund av $U_n = 2aU_{n-1} - bU_{-2}$, p även ingå som faktor i $2aU_{n-1}$. Men enligt den gjorda förutsättningen är p ej faktor i $2a$ och måste alltså vara faktor i U_{n-1}. En gemensam primfaktor till U_{n+1} och U_n är alltså även faktor i U_{n-1} och alltså även faktor i U_{n-2}, $U_{n-3}, \ldots, U_1$. Men $U_1 = 1$ och alltså kan U_{n+1} och U_n ej ha någon annan gemensam faktor än 1.

Sats 2. Om n är delbart med d (alltså $n = hd$), så är U_n delbart med U_d.

Bevis. Enligt (III) är $U_{r+s} = U_r V_s + U_s V_r$, och enligt (8) $V_s = aU_s - bU_{s-1}$ samt $V_r = aU_r - bU_{r-1}$

$$\therefore U_{r+s} = 2aU_rU_s - bU_rU_{s-1} - bU_{r-1}U_s = \\ = U_rU_{s+1} - bU_{r-1}U_s \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Insättes $r = kd$ och $s = d$, fås

$$U_{(k+1)d} = U_{kd}U_{d+1} - bU_{kd-1}U_d.$$

Är nu U_{kd} delbart med U_d, så måste alltså även $U_{(k+1)d}$ vara delbart med U_d. Men $U_{1 \cdot d}$ är delbart med U_d och alltså måste även $U_{2d}, U_{3d}, \ldots U_{hd}$ vara delbart med U_d.

Följdsats. Är d gemensam faktor till m och n, så är U_d gemensam faktor till U_m och U_n.

Sats 3. Om d är största gemensamma divisor till m och n, så måste varje gemensam divisor till U_m och U_n även vara divisor till U_d.

Bevis. Då d är största gemensamma divisor till m och n, så blir enligt Euklides' algoritm

$$\left.\begin{aligned} m &= kn + r \\ n &= k_1 r + r_1 \\ r &= k_2 r_1 + r_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-1} &= k_{n+1} r_n + d \\ r_n &= k_{n+2} d \end{aligned}\right\}$$

Nu är enligt (27) $U_m = U_{kn+r} = U_{kn}U_{r+1} - bU_{kn-1}U_r$. Om U_n innehåller en faktor p, så måste denna faktor även ingå i U_{kn} (sats 2), och om alltså p antages vara en gemensam faktor till U_m och U_n, så är den även gemensam faktor till U_m och U_{kn}. Då U_{kn-1} och U_{kn} ej ha någon gemensam faktor (sats 1), så måste p vara faktor i bU_r. Men p kan ej ha någon gemensam faktor med b, ty då skulle, på grund av $U_{kn} = 2aU_{kn-1} - bU_{kn-2}$, denna faktor ingå i $2a$, vilket strider mot förutsättningen. Alltså måste den gemensamma faktorn p till U_m och U_n även vara faktor i U_r. På samma sätt bevisas nu, att p även måste vara faktor i $U_{r_1}, U_{r_2}, \ldots U_d$.

Följdsats 1. Är d största gemensamma divisor till m och n, så är U_d största gemensamma divisor till U_m och U_n.

Följdsats 2. Äro m och n relativa primtal, så äro även U_m och U_n relativa primtal.

Följdsats 3. Är p ett primtal, så kan $U_1, U_2, \ldots U_{p-1}$ ej ha någon gemensam faktor med U_p.

Följdsats 4. Endast om p är ett primtal, kan U_p vara ett primtal, försåvida serien är ständigt numeriskt växande.

För det följande må erinras om Fermats sats[1]

$$D^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

där p är ett primtal och D ett godtyckligt helt tal — dock ej en mångfald av p. Vi antaga att $p > 2$. Som under denna

[1] Om kongruensteoriens elementer, se årg. 3, sid. 65 och 184.

förutsättning $p-1$ är ett jämnt tal, blir $\frac{p-1}{2}$ ett helt tal, och den ovanstående kongruensen kan skrivas

$$(D^{\frac{p-1}{2}}+1)(D^{\frac{p-1}{2}}-1)\equiv 0 \pmod{p}.$$

Som p ej kan vara divisor till *båda* faktorerna (deras skillnad är $=2$), så måste antingen

$$D^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod{p}$$

eller $$D^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \pmod{p}$$ [1]

Är $2a$ ett jämnt tal, blir a ett helt tal liksom även $\triangle = a^2-b$, men är $2a$ ett udda tal, blir $4\triangle = (2a)^2-4b$ ett helt tal, men ej $\triangle$. För att ej i varje särskilt fall behöva undersöka om $\triangle$ är ett helt tal eller ej, begagna vi i stället $4\triangle$, som enligt vad nyss visats alltid är ett helt tal. I det följande antaga vi, att p är ett udda primtal, som ej ingår såsom faktor i något av talen $2a$, b eller $4\triangle$.

Sats 4. $U_p\equiv 1 \pmod{p}$, om $(4\triangle)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod{p}$, men $U_p\equiv -1 \pmod{p}$, om $(4\triangle)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \pmod{p}$.

Bevis. Multipliceras (21) med 2^{p-1}, fås

$$2^{p-1}\cdot U_p = \frac{p}{1}\cdot(2a)^{p-1}+\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(2a)^{p-3}\cdot 4\triangle+\ldots+$$
$$+\frac{p}{1}\cdot 2a\cdot(4\triangle)^{\frac{p-3}{2}}+(4\triangle)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Då nu $2^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$ och alla termer i högra ledet utom den sista innehålla faktorn p, så blir

$$U_p\equiv(4\triangle)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

[1] Vilken av de båda kongruenserna, som för varje särskilt värde på D och p äger rum, bestämmes av huruvida D är en kvadratisk rest till p eller ej. Är D kvadratisk rest till p, gäller den förra, i annat fall den senare kongruensen.

Sats 5. $U_{p+1} \equiv 2a \pmod{p}$, om $(4\triangle)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, men

$$U_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}, \text{ om } (4\triangle)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Bevis. Multipliceras (21) med 2^p, fås

$$2^p \cdot U_{p+1} = \frac{p+1}{1} \cdot (2a)^p + \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (2a)^{p-2} \cdot 4\triangle + \ldots +$$
$$+ \frac{p+1}{1} \cdot 2a \cdot (4\triangle)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Då nu $2^p \equiv 2 \pmod{p}$ och $(2a)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ samt $p+1 \equiv 1 \pmod{p}$ och alla termer i högra ledet utom den första och sista innehålla faktorn p, så fås

$$U_{p+1} \equiv a\left[1 + (4\triangle)^{\frac{p-1}{2}}\right] \pmod{p}.$$

Sats 6. $U_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$, om $(4\triangle)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.

Bevis. Under det gjorda antagandet är $U_{p+1} \equiv 2a \pmod{p}$ (sats 5) och $U_p \equiv 1 \pmod{p}$ (sats 4), och då

$$U_{p+1} = 2aU_p - bU_{p-1},$$

blir $2a \equiv 2a - bU_{p-1} \pmod{p}$ $\because$ $U_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$.

Sats. 7. Om $(4\triangle)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, så är

$$U_{m+(p-1)} \equiv U \pmod{p}.$$

Bevis. Enligt (27) är $U_{m+(p-1)} = U\ U_p - bU_{m-1}U_{p-1}$. Men enligt sats 4 är $U_p \equiv 1 \pmod{p}$ och enligt sats 6 är

$$U_{p-1} \equiv 0 \pmod{p} \because U_{m+(p-1)} \equiv U_m \pmod{p}.$$

Sats 8. Om $(4\triangle)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$, så är

$$U_{m+\gamma(p+1)} \equiv U_m \pmod{p},$$

där γ är det minsta tal, som gör $b^\gamma \equiv 1 \pmod{p}$.

Bevis. Enligt (27) är $U_{m+(p+1)} = U_{p+1}U_{m+1} - bU_pU_m$. Men enligt sats 4 är $U_p \equiv -1 \pmod{p}$ och enligt sats 5 är $U_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}$ och alltså

$$\left.\begin{array}{ll} U_{m+(p+1)} \equiv bU_m & (\text{mod. } p) \\ \therefore\ U_{m+2(p+1)} \equiv bU_{m+(p+1)} & \text{»} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ U_{m+\gamma(p+1)} \equiv bU_{m+(\gamma-1)(p+1)} & \text{»} \end{array}\right\}$$

och genom multiplikation, $U_{m+\gamma(p+1)} \equiv b^\gamma U_m \pmod{p}$ eller, då $b^\gamma \equiv 1 \pmod{p}$, $U_{m+\gamma(p+1)} \equiv U_m \pmod{p}$.

Denna periodicitet hos fundamentalserien kan betraktas som en märklig motsvarighet till sinusfunktionens periodiska karaktär.

De härmed angivna satserna må vara nog för att visa vilken rikedom på märkliga egenskaper, de rekurrenta serierna av andra ordningen förete.

Litteratur: P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, Zweiter Teil, 2. Kap.

En användning och generalisering av mediansatsen.

Av AUG. SÖRENSEN.

En triangel $A_1A_2A_3$ med sidorna a_i ($i=1, 2, 3$) och en punkt P (i triangelns plan eller utanför) äro givna. Avstånden PA_1, PA_2, PA_3 vare ϱ_i ($i=1, 2, 3$). Vi söka till en början ett uttryck för $\Sigma\varrho_i^2$.

Delas A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 mitt itu i B_1, B_2, B_3, så äro PB_1, PB_2, PB_3 ($=m_1, m_2, m_3$) medianer i trianglarna PA_2A_3, PA_3A_1, PA_1A_2. Tillämpas mediansatsen på vardera av dessa trianglar, erhålles, efter addition och division med 2,

$$\Sigma\varrho_i^2=\tfrac{1}{4}\Sigma a_i^2+\Sigma m_i^2,$$

där Σm_i^2 betecknar summan av kvadraterna på medianerna. Denna sistnämnda summa kan på samma sätt uttryckas i funktion av summan av kvadraterna på sidorna i triangeln $B_1B_2B_3$ och en ny mediankvadratsumma o. s. v. *ad infinitum*. För varje gång förfarandet upprepas, tillkommer sidokvadratsumman i en triangel, vars sidor äro hälften så stora som i den närmast förut betraktade, samtidigt med att mediankvadratsumman för den sistnämndas deltrianglar utbytes mot mediankvadratsumman för den följande triangelns. Vi få sålunda slutligen

$$\Sigma\varrho_i^2=\tfrac{1}{4}\Sigma a_i^2(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\ldots)+3\varrho^2$$

eller

$$\Sigma\varrho_i^2=\tfrac{1}{3}\Sigma a_i^2+3\varrho^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

där ϱ betecknar den givna punktens avstånd från triangelns tyngdpunkt. Trianglarna sammankrympa nämligen alltmer kring denna punkt.

Av (1) följer omedelbart, att orten för en punkt P, så belägen, att summan av kvadraterna på avstånden till tre

givna punkter A_1, A_2, A_3 är konstant ($=s^2$), är en kring de givna punkternas tyngdpunkt såsom medelpunkt beskriven sfär med radien

$$\varrho = \tfrac{1}{3}\sqrt{3s^2 - \Sigma a_i^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Den motsvarande plangeometriska satsen erhålles omedelbart, om *sfär* utbytes mot *cirkel*.

Av (2) följer vidare, att s^2 har ett minimivärde $s_0^2 = \frac{1}{3}\Sigma a_i^2$ för $\varrho = 0$, d. v. s. när P sammanfaller med triangelns tyngdpunkt.

Den genom (1) uttryckta satsen kan betraktas som en generalisering av mediansatsen. Till denna återkommer man nämligen, om P tänkes förlagd i någon av triangelns vinkelspetsar.

Vi skola nu bevisa följande allmännare sats:

Summan av kvadraterna på avstånden ϱ_i från en godtycklig punkt P till punkterna i en punktgrupp A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) är $= \frac{1}{n}$ av summan av kvadraterna på avstånden a_i mellan punktgruppens punkter, ökad med n gånger kvadraten på punktens P avstånd ϱ från punktgruppens tyngdpunkt A.

Mellan n punkter kan man draga $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ föreningslinjer. Om vi för denna summa införa symbolen (n), kan satsen i korthet uttryckas genom formeln

$$\sum_1^n \varrho_i^2 = \frac{1}{n}\sum_1^{(n)} a_i^2 + n\varrho^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Antag, att denna formel gäller för n punkter. Vi skola bevisa, att den i sådant fall gäller även för $n+1$ punkter.

Bevis. Om vi med punktgruppen A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) införliva en ny punkt A_{n+1}, vars avstånd från P, A_i, A må vara ϱ_{n+1}, r_i, r, få vi

$$\sum_1^{n+1} \varrho_i^2 = \sum_1^n \varrho_i^2 + \varrho_{n+1}^2,$$

således enligt (3)

$$\sum_1^{n+1} \varrho_i^2 = \frac{1}{n}\sum_1^{(n)} a_i^2 + n\varrho^2 + \varrho_{n+1}^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Tillämpas formel (3) för punkten A_{n+1} med avseende å den *ursprungliga* punktgruppen A_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, erhålles

$$\sum_1^n r_i^2 = \frac{1}{n}\sum_1^{(n)} a_i^2 + nr^2. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

För den *nya* punktgruppen A_i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ är den inre avståndskvadratsumman

$$\sum_1^{(n+1)} a_i^2 = \sum_1^{(n)} a_i^2 + \sum_1^n r_i^2,$$

således enligt (5)

$$\sum_1^{(n+1)} a_i^2 = \sum_1^{(n)} a_i^2 + \frac{1}{n}\sum_1^{(n)} a_i^2 + nr^2$$

$$= \frac{n+1}{n}\sum_1^{(n)} a_i^2 + nr^2,$$

varav

$$\sum_1^{(n)} a_i^2 = \frac{n}{n+1}\sum_1^{(n+1)} a_i^2 - \frac{n^2}{n+1}r^2. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Insättes detta värde på $\sum_1^{(n)} a_i^2$ i (4), erhålles

$$\sum_1^{n+1} \varrho_i^2 = \frac{1}{n+1}\sum_1^{(n+1)} a_i^2 - \frac{n}{n+1}r^2 + n\varrho^2 + \varrho_{n+1}^2. \quad \ldots \quad (7)$$

Om vi nu med ϱ beteckna avståndet $P\bar{A}$ från P till tyngdpunkten $\bar{A}$ för den nya punktgruppen $A_i (i=1, 2, \ldots, n+1)$ och beakta, att $\bar{A}$ delar avståndet $A_{n+1}\,A=r$ i förhållandet $n:1$, ha vi enligt cosinussatsen, om $\angle P\bar{A}A$ betecknas med δ,

$$\begin{cases} \varrho^2 = \bar{\varrho}^2 + \left(\dfrac{r}{n+1}\right)^2 - \dfrac{2r\bar{\varrho}}{n+1}\cos\delta, \\ \varrho_{n+1}^2 = \bar{\varrho}^2 + \left(\dfrac{nr}{n+1}\right)^2 + \dfrac{2nr\bar{\varrho}}{n+1}\cos\delta. \end{cases}$$

Om den första av dessa ekvationer multipliceras med n och ekvationerna därefter adderas, erhålles

$$n\varrho^2 + \varrho_{n+1}^2 = (n+1)\bar{\varrho}^2 + \frac{n}{n+1}r^2. \quad \ldots \quad (8)$$

Med tillhjälp av denna relation kan (7) skrivas under formen

$$\sum_1^{n+1} \varrho_i^2 = \frac{1}{n+1} \sum_1^{(n+1)} a_i^2 + (n+1)\bar{\varrho}^2. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Om formel (3) gäller för n punkter, gäller den således även för $n+1$. Då den gäller för $n=2$ (mediansatsen), måste den gälla för vilket som helst godtyckligt värde på n (n ett helt tal $\geqq 2$).

Den första termen i högra membrum av formel (3) utgör $\frac{1}{n}$ av summan av kvadraterna på avstånden mellan punkterna A_i (punktsystemets *inre* avståndskvadratsumma, *inre* potenssumma). Denna term är således en för ett givet punktsystem A_i oföränderlig konstant Θ_0. Vänstra membrum utgör summan av kvadraterna på avstånden ϱ_i från en punkt P till punkterna A_i, och den generaliserade mediansatsen uttrycker således, att denna *yttre* avståndskvadratsumma (*yttre* potenssumma) är en funktion Θ_ϱ av punktens P avstånd ϱ från punktsystemets A_i tyngdpunkt A:

$$\Theta_\varrho = \Theta_0 + n\varrho^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Formeln visar, att Θ_ϱ är minst för $\varrho = 0$ och dess tillväxt proportionell med kvadraten på avståndet ϱ från punktsystemets tyngdpunkt.[1] Den yttre kvadratsumman är således konstant för alla punkter på en sfär med punktsystemets tyngdpunkt till medelpunkt (sats av Lagrange).

För $\varrho = 0$ är $\Theta_\varrho = \Theta_0$. Konstanten Θ_0 är således ingenting annat än avståndskvadratsumman för punktsystemets tyngdpunkt. Vi kunna emellertid även härleda en annan betydelse. Beräkna vi avståndskvadratsumman för samtliga punktsystemet tillhörande punkter A_i och dividera summan

[1] Den i mekaniken initierade läsaren ser naturligtvis genast, att den generaliserade mediansatsen utmynnar i en välbekant sats rörande tröghetsmoment. Skillnaden i behandlingen ligger huvudsakligen däri, att man inom mekaniken i allmänhet ej betraktar tröghetsmomenten för isolerade punkter (diskreta punktmängder) utan företrädesvis för linjer, ytor och kroppar, varför man där vanligen opererar med integraler, i vilka de ingående differentialerna utgöras av linje-, yt- eller rumselement.

av alla dessa kvadratsummor med n, få vi medelvärdet Θ_m av dessa kvadratsummor för samtliga till punktsystemet hörande punkter. I den så erhållna dubbelsumman ingår avståndskvadraten mellan varje punktpar *två gånger*. Vi få sålunda

$$\Theta_m = 2\Theta_0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

varigenom (10) antager formen[1]

$$\Theta_\varrho = \tfrac{1}{2}\Theta_m + n\varrho^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Den generaliserade mediansatsen (tyngdpunktsatsen) möjliggör en enkel lösning av ett flertal uppgifter, av vilka nedanstående må tjäna såsom exempel:

1. *Att beräkna höjden h i en reguljär tetraeder med kanten a.*

Tages avståndskvadratsumman för ett av tetraederns hörn med avseende å de tre övriga, erhålles omedelbart

$$3a^2 = a^2 + 3h^2,$$

således

$$h = \frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

2. *Summan av kvadraterna på tyngdpunktstransversalerna*[2] *i en tetraeder är $\frac{4}{9}$ av summan av kanternas kvadrater.*

Tages avståndskvadratsumman för varje hörn med avseende å de övriga, erhålles genom addition

$$2\Sigma a_i^2 = \tfrac{2}{3}\Sigma a_i^2 + 3\Sigma\varrho^2,$$

varav

$$\Sigma\varrho^2 = \tfrac{4}{9}\Sigma a_i^2.$$

3. *Beräkna avståndet d mellan den kring en triangel omskrivna cirkelns medelpunkt och triangelns tyngdpunkt.*

Avståndskvadratsumman för den omskrivna cirkelns medelpunkt med avseende å triangelns vinkelspetsar är

[1] Satsen kan formuleras sålunda:
Medelvärdet av ett punktsystems (polära) tröghetsmoment med avseende å samtliga punktsystemet tillhörande punkter är dubbelt så stort som tröghetsmomentet med avseende å punktsystemets tyngdpunkt.

[2] Härmed förstås avståndet från en hörnpunkt till motstående triangels tyngdpunkt.

$$3R^2 = \tfrac{1}{3}\Sigma a_i^2 + 3d^2,$$

varav

$$d = \tfrac{1}{3}\sqrt{9R^2 - \Sigma a_i^2}.$$

4. *Summan av kvadraterna på avstånden från en godtycklig punkt P till vinkelspetsarna av en liksidig triangel ABC är tre gånger så stor som summan av kvadraten på punktens avstånd till triangelns omskrivna cirkels medelpunkt och kvadraten på denna cirkels radie* (van Swinden, Elemente der Geometrie).

Betecknas triangelns sida med a, så är, enligt en bekant sats, $a^2 = 3R^2$. Tages då avståndskvadratsumman för P med avseende å ABC, får man

$$\Sigma \varrho_i^2 = a^2 + 3\varrho^2 = 3(\varrho^2 + R^2).$$

5. *Att på en given sfär (cirkel) finna de punkter, för vilka summan av kvadraterna på avstånden till ett antal givna punkter är maximum eller minimum.*

De sökta punkterna ligga på den räta linje, som förenar sfärens (cirkelns) medelpunkt med de givna punkternas tyngdpunkt.

Ett specialfall härav förekommer i uppgift 105 i denna tidskrift årg. 4 h. 2.

6. *Sök orten för en punkt, så belägen, att summan av dess potenser med avseende å ett godtyckligt antal sfärer (cirklar) är konstant.*

Den sökta orten är en kring tyngdpunkten till de givna sfärernas (cirklarnas) medelpunkter såsom centrum beskriven sfär (cirkel). Om nämligen den givna potenssumman är s^2, avstånden mellan sfärernas (cirklarnas) medelpunkter $a_1, a_2, \ldots, a_{(n)}$, sfärernas (cirklarnas) radier $r_1, r_2, \ldots, r_n$, avstånden från den sökta punkten till sfärernas (cirklarnas) medelpunkter $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ och avståndet från den sökta punkten till medelpunkternas tyngdpunkt ϱ, har man

$$s^2 = \sum_1^n \varrho_i^2 - \sum_1^n r_i^2 = \frac{1}{n}\sum_1^{(n)} a_i^2 + n\varrho^2 - \sum_1^n r_i^2,$$

således

$$\varrho^2 = \frac{1}{n}\left(s + \sum_1^n r_i^2 - \frac{1}{n}\sum_1^{(n)} a_i^2\right) = \text{konst.}$$

Ett par specialfall härav ha berörts i författarens föregående uppsats i denna tidskrift.

7. *Beräkna summan av kvadraterna på sidor och diagonaler i en reguljär n-hörning.*

Låt den omskrivna cirkelns radie vara R. Tages avståndskvadratsumman för cirkelns medelpunkt, erhålles

$$nR^2 = \frac{1}{n}\sum_1^{(n)} a_i^2,$$

varav

$$\sum_1^{(n)} a_i^2 = n^2R^2.$$

8. *Beräkna medelvärdet av kvadraten på avståndet från en (rörlig) punkt inom en cirkel till en (rörlig) punkt på cirkelns periferi.*

Låt cirkelns radie vara r. Avståndskvadratsumman för en punkt P (på avståndet ϱ från cirkelns medelpunkt) med avseende å vinkelspetsarna av en i cirkeln inskriven reguljär n-hörning är

$$\sum_1^n \varrho_i^2 = \frac{1}{n}\sum_1^{(n)} a_i^2 + n\varrho^2 = n(r^2 + \varrho^2) \text{ (enl. ex. 7).}$$

Medelvärdet av kvadraten på avståndet från punkten P till n-hörningens vinkelspetsar är således

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \varrho_i^2 = r^2 + \varrho^2.$$

Då det erhållna uttrycket är oberoende av n, kunna vi låta n växa obegränsat, varigenom n-hörningen övergår i cirkeln. Tänkes nu denna uppdelad i koncentriska elementarringar, finner man lätt det sökta medelvärdet:

$$\int_0^r \frac{2\pi\varrho d\varrho\,(r^2 + \varrho^2)}{\pi r^2} = \frac{2}{r^2}\int_0^r \varrho\,(r^2 + \varrho^2)\,d\varrho = \tfrac{3}{2}r^2.$$

På samma sätt beräknas medelvärdet av kvadraten på avståndet från en (rörlig) punkt inom en sfär till en (rörlig) punkt på sfärens yta. Tänkes sfären uppdelad i koncentriska elementarskikt, finner man, att det sökta medelvärdet är

$$\int_0^r \frac{4\pi\varrho^2 d\varrho\,(r^2+\varrho^2)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r^3}\int_0^r (r^2+\varrho^2)\varrho^2 d\varrho = \tfrac{8}{5}r^2.$$

9. *Summera serien*

$$s = n\cdot 1^2 + (n-1)\cdot 2^2 + (n-2)\cdot 3^2 + \ldots + 1\cdot n^2.$$

Man ser lätt, att s utgör summan av kvadraterna på alla delsträckor på en determinerad rät linje, delad i n lika stora delar, vardera = 1. Beräknar man då $\sum_1^{n+1} \varrho_i^2$ för linjens ena ändpunkt, får man

$$\frac{s}{n+1} = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 - (n+1)\cdot\frac{n^2}{4} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)}{4} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{12},$$

således

$$s = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

10. *Beräkna* $y = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_1^n k\,(n-k+1)\sin^2\dfrac{kx}{n}}{n^2}$.

Om vi för enkelhetens skull införa beteckningen $s_n = \sum_1^n k\,(n-k+1)\sin^2\dfrac{kx}{n}$, så är $4s_n$ den inre avståndskvadratsumman för det punktsystem, som bildas av punkterna på en n-delad båge av längden $2x$ av enhetscirkeln. Enligt (3) är då avståndskvadratsumman för cirkelns medelpunkt

$$n+1 = \frac{4s_n}{n+1} + (n+1)\varrho^2,$$

således

$$s_n = \tfrac{1}{4}(n+1)^2(1-\varrho^2),$$

$$y = \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n^2} = \tfrac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2(1-\varrho^2)\right] = \tfrac{1}{4}(1-\varrho^2).$$

Värdet på ϱ erhålles ur ekvationen

$$2x \cdot \varrho = \int_{-x}^{x} \cos\varphi \, d\varphi = 2 \sin x,$$

varav

$$\varrho = \frac{\sin x}{x},$$

således

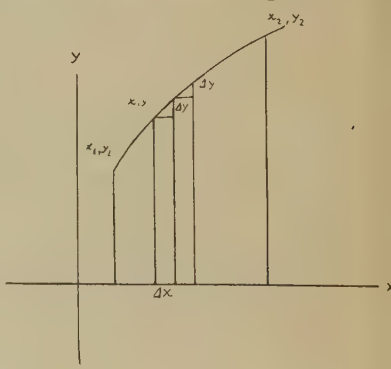
$$y = \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}\right).$$

Funktionen har maxima $(= \frac{1}{4})$ för $x = k\pi\,(k \neq 0)$ och minima $(= \frac{1}{4}\sin^2 x)$ för alla x-värden som satisfiera ekvationen $x = \operatorname{tg} x$. För stora värden på x skiljer sig gränsvärdet föga från $\frac{1}{4}$.

Inledning till integralräkningen.

Av H. PETRINI.

Då den matematiska sektionen av det sista lärarmötet uttalat sig för införandet av elementen av integralräkningen å realgymnasiet, torde intresset böra riktas på att förenkla den vanliga framställningen. Vanligen utgår man från indefinita integraler, men den naturliga gången synes mig vara att börja med definitionen av integralen som gränsvärdet för en summa. Indefinita integraler behövas blott, när det gäller att uppsöka den funktion vars derivata är känd, men på skolstadiet torde man ej böra syssla med sådana funktioners uppsökande, utan endast hålla sig till sådana fall, då denna funktion är omedelbart känd t. ex. genom förut givna exempel på derivation.



Vid min undersökning har jag plägat introducera integraler på följande sätt. Antag att y är en funktion av x, som representeras av en kurva för $x_1 \leqq x \leqq x_2$, och låt y_1 och y_2 vara värdena på y för $x=x_1$ och $x=x_2$ resp. Man finner av figuren omedelbart

$$\Sigma \Delta y = y_2 - y_1, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

där summationen utsträckes för hela området $x_1 \leqq x \leqq x_2$. Men enligt definition på derivatan y' är

$$y' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Alltså kan man sätta

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon, \text{ där } \lim_{\Delta x = 0} \varepsilon = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\because \Delta y = y' \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

$$\Sigma \Delta y = \Sigma y' \Delta x + \Sigma \varepsilon \Delta x . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Om ε_1 är det numeriskt största värdet på ε, så är $\Sigma \varepsilon \Delta x$ numeriskt $< \Sigma \varepsilon_1 \Delta x = \varepsilon_1 \Sigma \Delta x = \varepsilon_1 (x_2 - x_1)$,

$$\because \lim_{\Delta x = 0} \Sigma \varepsilon \Delta x = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Av (1), (3) och (4) fås således

$$\lim_{\Delta x = 0} \Sigma y' \Delta x = y_2 - y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

vilket är det sökta resultatet.

Sätter man

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ y_2 - y_1 &= f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

så kan (5) skrivas under formen

$$\lim_{\Delta x = 0} \Sigma f'(x) \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,a)$$

Införes — vilket dock ej är nödvändigt — beteckningen

$$\lim_{\Delta x = 0} \Sigma f'(x) \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\, dx , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

så fås slutligen

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

där $f(x)$ i alla förekommande fall kan anses känt (på en additionskonstant när), då $f'(x)$ är givet.

Ytspänning och kapillaritet.[1]

Av AD. MEYER.

Efterföljande uppsats innehåller i sak intet nytt: Den ifrågavarande teorin förskriver sig tvärtom i huvudsak redan från Laplace. Men då det visat sig, att endast ett fåtal av lärarne i fysik känner densamma, och att fenomenen av dessa, liksom i våra läroböcker, i motsats mot vissa utländska, endast tagas så att säga rent naturalhistoriskt, under det att teorin i själva verket väl lämpar sig för våra läroverk, så har jag ansett det icke utan nytta att giva en framställning därav, som kan lämpa sig att föredraga redan i 1:a ringen, där ju saken plägar förekomma.

Redan i inledningen till fysiken vid tal om aggregationsformerna plägar jag, sedan *formaldefinitionerna* av fast kropp, vätska och gas blivit givna ungefär så som de tagas i Molls fysik, även meddela följande *realdefinitioner*, vilka dock, i likhet med nästan alla dylika, äro i viss mån hypotetiska:

I en fast kropp röra sig partiklarna i *slutna* banor, så att de efter förloppet av en viss tid alltid ånyo befinna sig på samma plats, varvid såsom jämförelse kan tagas planetsystemet. Planetsystemet är således en fast kropp, ehuru förhållandet mellan molekylernas avstånd och storlek är ett helt annat än i en vanlig sådan.

I en flytande kropp röra sig partiklarna i *krokliniga, öppna* banor, så att en molekyl, som ena ögonblicket ligger nära bottnen, en tid därefter kan befinna sig vid ytan, och den återkommer endast tillfälligtvis till en punkt, där den

[1] Föredrag hållet vid provårskursen i Stockholm d. 20 mars 1923.

förut befunnit sig. Detta tillstånd kan jämföras med de icke periodiska kometernas, vilka komma från den oändliga världsrymden, gripas av solens dragningskraft, så att de göra en sväng kring henne, för att åter avlägsna sig, till dess att de gripas av en annan sol o. s. v.

I en gasformig kropp däremot röra sig partiklarna i *rätliniga, men brutna* banor, rätliniga så länge tills de träffa väggarna eller varandra, då de reflekteras. Detta kan jämföras t. ex. med kulorna på en biljard. I världsrymden känna vi däremot inga därmed jämförliga rörelser, då attraktionen mellan kropparna, även på stora avstånd, är för stor för att något dylikt skulle kunna äga rum.

*

Allt detta upprepas nu, när man skall övergå till ytspänningen, för att därav draga den slutsatsen, att mellan en fast kropps eller vätskas närbelägna delar måste finnas en attraktion, vilken då den äger rum mellan smådelarna av samma kropp, kallas kohæsion, då den verkar mellan olika kroppar, adhæsion. Dock har man aldrig kunnat påvisa denna attraktion på mätbara avstånd: en fast kropp som närmas än så mycket till en vätska förmår ej åstadkomma någon lyftning av densamma; först vid *beröring* inträffa de fenomen som häntyda härpå, och vilka visa sig, t. ex. om vätskan är vatten och skivan av glas, däruti att vatten fastnar på skivan och följer med den upp då den lyftes. Detta visar, att dessa krafter ytterligt hastigt avtaga med växande avstånd. Man har i själva verket beräknat, att det högsta avstånd inom vilket dessa krafter hava en mätbar verkan är 0,00005 mm. Men inom detta avstånd måste de vara högst betydande: Redan det enkla fenomen, att en kvicksilverdroppe på en glasskiva antar i det närmaste sfärisk form, visar att kohæsionen kan övervinna tyngdkraften, som vill breda ut den, och än märkligare fenomen få vi se i det följande.

Vi tänka oss (fig. 1) ett kärl med vätska, och i densamma en partikel *A* på ett visst avstånd från ytan och

en partikel *B* ytterst nära ytan. Om vi kring vardera upprita en sfär vars radie är det avstånd inom vilket kohæsionskrafterna verka, den s. k. aktionsradien, det ovan angivna avståndet 0,00005 mm, så finna vi, att på *A* dessa krafter måste verka lika i alla riktningar, och således upphäva varandras verkan, men att däremot i *B*, där översta delen av sfären ligger utom vätskan, krafternas resultant måste verka nedåt.

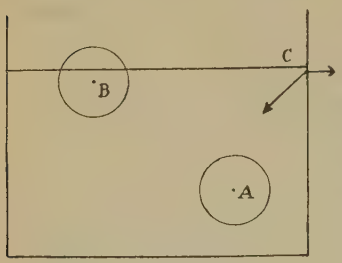


Fig. 1.

Följden härav blir således, att inom ett lager närmast ytan intill dubbla aktionsradien, utom tyngdkraften även andra starka krafter verka nedåt på varje partikel, varför således inom detta lilla lager vätskan blir tätare än på andra ställen, vilket kan uppvisas genom att t. ex. en synål eller en gillettklinga kan fås att flyta på vatten därstädes, om den blott nedlägges så försiktigt, att den ej genomtränger detta ytterst tunna lager; men sker detta, så sjunker den genast. På detta sätt uppkommer således den s. k. sega huden. Kohæsionskrafterna äro således så starka, att de kunna sammanpressa ett litet skikt av vattnet till en täthet, större än järnets.

Härav förklaras nu lätt alla de fenomen som pläga visas med utspända såpvattenshinnor, såsom t. ex. följande: Vid en ring av metalltråd fäst på ett skaft (fig. 2) fästas i två diametralt motsatta punkter tvenne icke spända silkestrådar. Om ringen doppas i såpvatten,[1] så att en

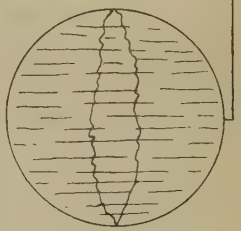


Fig. 2.

[1] Såpvattnet tillsättes för större hållbarhets skull med något glycerin och socker. En lösning, som kan bevaras längre, fås genom det i denna tidskrift årg. 1 sid. 180 angivna receptet. Dock har jag funnit, att den tillsatta ammoniaken är till mer skada än gagn, under det att däremot en ej för liten tillsats av socker i hög grad förhöjer hinnans hållbarhet. Sockret bör först tillsättas strax före användningen.

hinna bildas, så kunna trådarna lägga sig hur som helst, men om hinnan genombrytes mellan trådarna, så spänna de sig genast åt det håll, där hinnan finnes kvar. När den är genombruten mellan trådarna, så befinner sig nämligen en punkt invid desamma vid den fria ytan av en vätska, och lider därför, såsom ovan är sagt, ett tryck inåt vätskan.

*

Hittills hava vi endast sysselsatt oss med det fall, att vätskans yta är plan.

Man kan då fråga sig, vartill det tjänar att behandla något annat, då ju en vätskas fria yta alltid ställer sig horisontell. Detta är emellertid ett misstag: den ställer sig visserligen horisontell i det fall att tyngdkraften är den enda på vätskan verkande kraften, såsom i de flesta fall är fallet, men såsom allmän regel gäller, att den ställer sig vinkelrät mot resultanten till de verkande krafterna.

Om vi då betrakta en vätskeyta i omedelbara närheten av kärlets vägg (partikeln *C* i fig. 1), så finna vi att på en partikel därstädes, utom tyngdkraften, måste verka dels kohæsionskraften, riktad snett nedåt i 45° vinkel, dels väggens attraktion, adhæsionskraften, in mot väggen. Riktningen av resultanten till dessa tre krafter kommer då att bero på förhållandet mellan adhæsionens och kohæsionens storlek, den är i allmänhet riktad snett nedåt mot väggen, om adhæsionen är så stor att vätskan väter kärlet (t. ex. vid vatten i glaskärl), men snett inåt vätskan, om så ej är förhållandet (t. ex. kvicksilver i glaskärl). Ytan kommer därför i förra fallet att invid väggen ställa sig konkav, i senare fallet konvex, vilket ju lätt uppvisas. Särskilt vid beröring av kvicksilver och glas har det visat sig, att vinkeln mellan glaset och kvicksilverytan belöper sig till c:a 45°.

Om nu kärlet är så smalt, att dessa buktigheter beröra varandra, så hava vi en vätskemängd, begränsad av en buktig yta, och vilja därför undersöka yttryckets förhållande vid en sådan.

Betrakta vi då fig. 3, och punkten *A* därstädes, så finna vi, att trycket nedåt på densamma måste vara mindre än om den låge lika långt under en plan yta, ty den vattenmassa som ligger inom attraktionssfären mellan ytan och dess tangentplan vill draga partikeln *A* uppåt. Låge däremot partikeln såsom *B* i fig., så skulle yttrycket verka snett nedåt, vilket delvis förklarar den attraktion som äger rum mellan två på vatten flytande spån eller mellan ett dylikt och en nedstucken kropp som fuktas av vatten. Naturligtvis kan det även förklaras genom att spånen vill flyta upp så högt som möjligt.

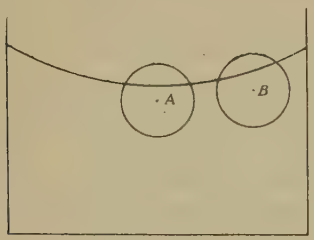


Fig. 3.

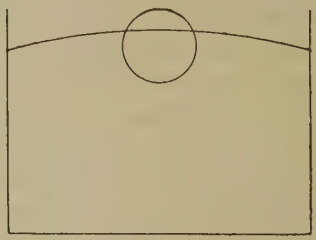


Fig. 4.

Om däremot ytan vore konvex, så vore yttrycket av samma orsak större än vid en plan yta (fig. 4), och det är ju tydligt, att ju starkare buktigheten är, d. v. s. ju mindre krökningsradien, desto starkare måste detta fenomen framträda. Om vi t. ex. hava en såpbubbla, fasthängande vid pipan, så består ju denna av en vätska begränsad av en konvex och en konkav yta. Då yttrycket i den förra, enligt det föregående, är större än i den senare, så måste ju bubblan sträva att sammandraga sig, och detta desto mer ju mindre (= mera krökt) den är. Detta kan vackert påvisas genom följande experiment: Man konstruerar en apparat enligt vidstående figur (fig. 5). *ABC* är ett ⊤ rör. Vid

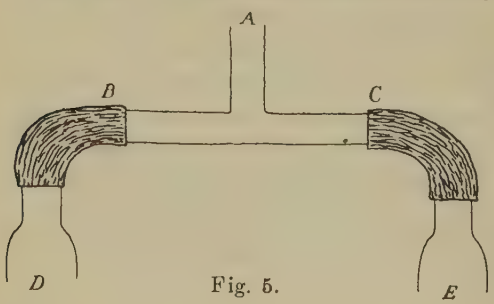


Fig. 5.

B och *C* äro genom kautschuksligaturer fästa lerpipor *D* och *E*. Genom att växelvis sammantrycka ligaturerna kan man uppblåsa en liten såpbubbla vid *D* och en större vid *E*. Om sedan *A* tilltäppes och *D* och *E* stå i förbindelse, så inträffar det, att den mindre bubblan alltmer sammandrager sig och slutligen försvinner, under det att den större sväller ut, ett resultat som vi kunnat på förhand förutsäga ur teorin.

*

Vi övergå nu till ytspänningens viktigaste fenomen, kapillariteten.

Själva fenomenet, att vätska uppsuges i fina rör, om den fuktar dem, men nedpressas i motsatt fall, torde vara så väl bekant, att det ej vidare behöver omtalas, men dess sammanhang med ytspänningen torde vara mindre välbekant. Härom säger Molls fysik endast: »Det bör emellertid observeras, att hårrörskraften ej behöver betraktas som en naturkraft av nytt slag, utan kan förklaras som en yttring av kohæsionen och adhæsionen.» Att den är en följd av den förut omtalade ytspänningen beröres ej alls. Och dock är sammanhanget ytterligt enkelt: Om i två med samma vätska fyllda kommunicerande rör båda ytorna äro plana eller lika mycket buktiga, så äro ju såväl de hydrostatiska trycken som ytspänningarna lika, då vätskan står lika högt i båda, och jämvikt äger således rum, men om däremot ytan i det ena röret är plan, i det andra buktig, så måste det överskjutande yttrycket kompenseras genom ett hydrostatiskt tryck, och ytorna därför stå olika högt. Att denna höjdskillnad, som ju blott framkallas av den lika differensen mellan yttrycken i en plan och en buktig yta, kan uppgå till stora belopp, visar tydligast, att kohæsionskrafterna måste vara enormt stora på de små avstånden.

Man skulle därför nästan vara frestad att betvivla hela teorins riktighet, att kapillariteten härleder sig från ytspänningen; men detta bekräftas på det tydligaste därav, att stigningen eller depressionen uteslutande beror på rörens

diameter *just i den punkt där ytorna stå*, och är fullständigt oberoende av rörens diameter på andra ställen. I detta avseende äro följande båda experiment särdeles belysande.

1) Ett vitt och ett smalt glasrör, det senare med tjocka väggar, ställas i kommunikation och vatten ihälles. Då står, såsom bekant, vattnet högre i det smalare röret, emedan ytan därstädes är mer konkav. Men om rören fyllas så högt med vatten, att en liten vattenpärla bildas i det smala rörets spets,[1] så står vattnet tvärtom något högre i det vidare röret, ty då är ytan i det smalare konvex.

2) Ett kapillärrör *A* (fig. 6), på vilket en kula *BC* är utblåst, står i kommunikation med ett vidare rör *D*. Om då kvicksilver ihälles i *D*, så kommer, så länge ytan i det smala röret står nedanför *C*, denna att stå lägre än i *D*. Kvicksilver ihälles så länge till dess ytan står vid *C*. Om då röret *AC* är mycket smalt, c:a 0,75 mm, och kulan *BC* liten, c:a 5 mm i diameter, så kommer kvicksilvret, även vid den minsta ökning av dess mängd, att fylla hela kulan *BC*, ty det yttryck som höll det vid *C* försvinner, och då strömmar allt överskjutande kvicksilver in i kulan. Om däremot röret är mindre smalt, c:a 1,5 mm, och kulan större, så kan man få ytan att stanna var som helst i kulan. Om man då låter det stanna nära *B*, så blir dess yta *konkav*, ty, såsom förut är nämnt, gör en kvicksilveryta alltid ung. 45° vinkel med väggen; och i följd därav kommer ytan i det större kärlet att stå lägre än i kapillärröret. I detta experiment kan man således få kvicksilvret att förhålla sig i kapillärt avseende såsom vatten, liksom i det förra vattnet förhåller sig som kvicksilver.

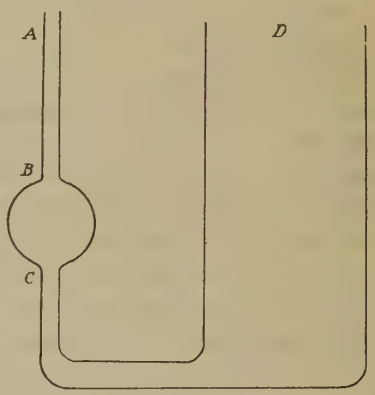


Fig. 6.

[1] Detta lyckas bäst, om kring rörets öppning glaset smörjes med något fett.

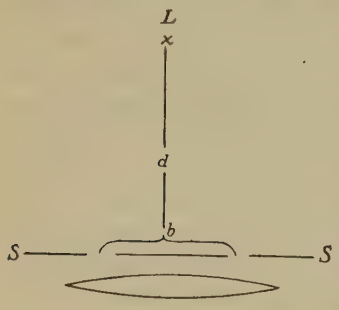
Om mätning av dubbelstjärnor och stjärndiametrar medelst Michelsons interferensmetod.

Av BERTIL LINDBLAD.

Den förste att skissera en metod att mäta stjärnors skenbara diametrar medelst en interferensmetod torde vara Fizeau. Principerna för Fizeaus tankegång äro i stort sett desamma som senare i Michelsons arbeten. Försök att tillämpa metoden gjordes också av Stephan i Marseille för en del stjärnor, men med negativt resultat — en ganska snäv övre gräns för den angulära diametern kunde dock fastställas.

År 1890 publicerade Michelson ett par uppsatser, där han angriper problemet och klargör principerna för dess lösning. Frågan är, hur en mycket liten ljuskällas struktur och form kan utrönas genom att studera den av ljuskällans dimensioner förorsakade störningen i vissa interferensfenomen. Som exempel kunna vi ta de interferensfenomen, som uppstå i fokalplanet, då man på olika sätt avbländar ett teleskopobjektiv. Då ljuskällans skenbara diameter blir mycket liten, kan man ej längre genom det direkta seendet i kikaren uppfatta föremålets form, men om man framför objektivet sätter en skärm med t. ex. två rektangulära öppningar, kan man likväl dra en hel del slutsatser ur interferensbildens utseende. Av särskild vikt för spektroskopien är Michelsons tillämpning av en liknande princip medelst den av honom konstruerade »refraktometern» eller »interferometern», där interferensfenomenet är av annan natur; det är den typ av instrument som av honom använts för utmätning av arkivmetern i cadmiumlinjernas våglängder och vid det berömda, för relativitetsteorien grundläggande Michelsonska interferensförsöket. Tillämpningen av den störda interferensens princip rör här spektrallinjers struktur. Liksom man genom interferensfenomenen

vid ett teleskop kan dra slutsatser om ett ytterst litet föremåls struktur — t. ex. för små planeter, de större planeternas månar och i senaste tid för vissa fixstjärnor — på samma sätt kan finstrukturen hos en i en spektralapparat frambragt spektrallinje undersökas medelst interferometern, emedan här interferensfenomenet är känsligt för en liten förskjutning i våglängd. Själva grundprincipen är analog i båda fallen, fast interferensapparaten har olika konstruktion och manövreras på annat sätt. — Då det är de astronomiska tillämpningarna jag här skall redogöra för, antar jag emellertid, att vi ha en liten ljuskälla, som är homogen, d. v. s. utstrålande samma sorts strålning på hela ytan och antar vidare, att interferensen är av det slag, som uppstår i fokalplanet till ett avbländat teleskopobjektiv.



Vi anta först, att ljuskällan L är absolut punktformig, och att vi låta ljuset infalla nära vinkelrätt mot en skärm S, i vilken vi utskurit två små hål av låt oss säga rektangulär form. De två mot hålen gående ljusströmmarna låta vi interferera i fokalplanet till en lins, där vi uppfånga diffraktionsbilden B (större ju mindre hålen göras), som då kommer att visa sig genomdragen av en serie mörka interferenslinjer motsvarande vägskillnader på successiva udda multipler av halva våglängden.

Fig. 1.

Antag sedan, att ljuskällan har en ändlig utsträckning i en riktning, x-riktningen, som vi anta parallell med hålens sammanbindningslinje. Antag totala intensiteten av ett intervall dx är $F(x)dx$. Varje punkt av föremålet kommer tydligen att ge sitt eget system interferensfransar, och det resulterande systemet kommer att bli en summering av dem alla.

Låt oss betrakta en viss punkt i det interferenssystem i bilden, som motsvarar en lysande punkt i föremålets origo. Antag, att de två sammanfallande ljusströmmarna äro identiskt lika, utom att de ha en viss vägskillnad Δ_0. Den resulterande amplituden kommer att ha som faktor

$$\cos\frac{\pi}{\lambda}\Delta_0$$

och den resulterande intensiteten

$$\cos^2\frac{\pi}{\lambda}\Delta_0.$$

För *en annan punkt av föremålet* ha vi på *samma punkt i interferensbilden* vägskillnaden

$$\Delta = \Delta_0 + \delta$$

och intensiteten

$$I \sim \cos^2\frac{\pi}{\lambda}(\Delta_0 + \delta).^1$$

Vi måste uttrycka δ som funktion av x. Vi ha med tillräcklig approximation för stort d

$$\delta = \frac{b}{d}x.$$

Då mot stycket dx svarar totalintensiteten $F(x)\,dx$, få vi genom summering för den ifrågavarande punkten i interferenssystemet totala intensiteten

$$\bar{I} \sim \int F(x)\cos^2\frac{\pi}{\lambda}(\Delta_0 + \delta)\,dx,$$

integrationen utförd över hela föremålets längd. Vi få alltså

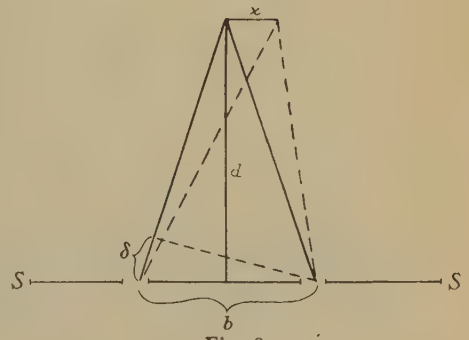


Fig. 2.

$$\bar{I} \sim \int F(x)\,dx + \int F(x)\cos 2\frac{\pi}{\lambda}\Delta_0 \cos 2\frac{\pi}{\lambda}\delta\,dx -$$

$$-\int F(x)\sin 2\frac{\pi}{\lambda}\Delta_0 \sin 2\frac{\pi}{\lambda}\delta\,dx,$$

[1] Tecknet $\sim$ betyder här »proportionell mot».

eller om vi sätta

$$P = \int F(x)\,dx, \quad C = \int F(x)\cos kx\,dx, \quad S = \int F(x)\sin kx\,dx,$$

$$k = 2\frac{\pi}{\lambda}\frac{b}{d}, \quad 2\frac{\pi}{\lambda}\Delta_0 = \vartheta,$$

få vi

$$\bar{I} \sim P + C\cos\vartheta - S\sin\vartheta.$$

ϑ, som beror av vägskillnaden Δ_0 motsvarande föremålets origo, kommer att anta olika värden för olika punkter i interferensbilden. Vi få en ljus frans, då $\bar{I} = \max.$, och en mörk linje för $\bar{I} = \min.$ Vi få omedelbart

$$\bar{I} = \begin{cases} \max. \\ \min. \end{cases} \text{ för } \qquad \operatorname{tg}\vartheta = -\frac{S}{C},$$

vilket ger

$$\bar{I} = P \pm \sqrt{C^2 + S^2},$$

där övre tecknet motsvarar max., undre min.

Michelson definierar interferensfransarnas *synlighet* V på följande sätt,

$$V = \frac{\bar{I}_{\max} - \bar{I}_{\min}}{\bar{I}_{\max} + \bar{I}_{\min}},$$

och vi få följaktligen

$$V = \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{P}.$$

Denna teoretiskt definierade »synlighet» kan sedan genom speciella experiment jämföras med den subjektivt bedömda synligheten av fransarna vid direkt observation.

Vad som särskilt intresserar oss är det fall, då interferensfransarna försvinna, d. v. s. då $V = 0$. Vi ha då

$$\sqrt{C^2 + S^2} = 0, \quad \therefore\ C = 0, \quad S = 0,$$

eller

$$\int F(x)\cos kx\,dx = 0, \quad \int F(x)\sin kx\,dx = 0, \text{ där } k = 2\frac{\pi}{\lambda}\frac{b}{d}.$$

Om föremålet är symmetriskt, gäller den andra likheten

$S=0$ automatiskt, och villkoret för försvinnande synlighet reducerar sig till den första likheten $C=0$.

I. Antag föremålet är en dubbelstjärna med angulär distans α (i absolut mått). Föremålet reducerar sig då till två lysande punkter på avståndet från varandra $x=\alpha d$, om d är avståndet från observatören.

Antag den mindre komponentens ljusstyrka är r i förhållande till den större. Vi ha $kx=0$ och $kx=2\frac{\pi}{\lambda}b\alpha$ för de två komponenterna och således

$$C=P\left(1+r\cos 2\frac{\pi}{\lambda}b\alpha\right),\quad S=P\cdot r\sin 2\frac{\pi}{\lambda}b\alpha$$

$$V=\frac{\sqrt{1+r^2+2r\cos 2\frac{\pi}{\lambda}b\alpha}}{1+r}.$$

Om $r=1$, d. v. s. om komponenterna äro av samma intensitet, ha vi

$$V=\cos\frac{\pi}{\lambda}b\alpha,$$

som försvinner för

$$\text{I}\quad\ldots\ldots\quad\alpha=\frac{1}{2}\frac{\lambda}{b}.$$

Om $r\neq 1$, kan man finna r genom att observera maximala och minimala synligheten.

II. För en cirkulär lysande skiva få vi för funktionen $F(x)$ ta totala intensiteten av en strimma med avståndet x från origo. Om skivan med radien R är jämnt belyst, ha vi alltså $F(x)=2\sqrt{R^2-x^2}$, och vi ha att beräkna ett uttryck av formen

$$V=\frac{\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\cos kx\,dx}{\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx}$$

för olika värden på kR. Man får $V=0$ för $kR=220^0$, d. v. s.

$$2\,\frac{\pi}{\lambda}\,\frac{b}{d}R = 220 \cdot \frac{\pi}{180},$$

eller om vi sätta *angulära diametern* $\frac{2R}{d} = \alpha$,

$$\text{II} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha = 1{,}22\,\frac{\lambda}{b}.$$

Enligt formlerna I och II ha vi alltså endast att uppsöka det avstånd b mellan de två öppningarna, som kommer interferensbanden att försvinna, varefter, då den visuellt effektiva våglängden λ är bekant, vinkelavståndet mellan de två komponenterna i en dubbelstjärna eller skenbara diametern hos en enkel stjärna kan beräknas direkt.

Redan år 1891 hade Michelson med Lickobservatoriets stora refraktor tillämpat metoden för att bestämma diametern hos de större Jupitermånarna. Vad stjärndiametrarna beträffar, tycks den föreställningen ha verkat avskräckande, att luftens oro skulle störa interferensfenomenet, då baslinjen b sannolikt skulle behöva göras relativt stor. Med andra ord den differentiella verkan av luftoron för de två interfererande knippena skulle vara för stor. Så är emellertid ej fallet, som visat sig vid mätningarna med 100-tumsreflektorn på Mount Wilson. Diffraktionsbilden ändrar visserligen hastigt läge vid orolig luft, men dess interferensfransar äro jämförelsevis stadiga inom bilden. Michelson fann i själva verket detta vara fallet med användande av den stora Yerkesrefraktorn, och på hans initiativ började Pease och Anderson på Mount Wilson att gripa sig an med problemet.

En lämplig dubbelstjärna fann man i Capella. Denna stjärna är känd som spektroskopiskt dubbel, och vissa egenskaper hos den relativa banan ha kunnat beräknas men ej ens de kraftigaste teleskop ha kunnat upplösa den i komponenter visuellt. Ett teleskops upplösningsförmåga för direkt seende kan nu uppskattas på följande sätt. En stjärna ger i fokus en skiva, vars angulära diameter sedd

från objektivet är $2 \cdot 1{,}22 \frac{\lambda}{D}$,

om objektivets diameter är D. För att kunna urskiljas från varandra bör separationen mellan två stjärnor vara åtminstone hälften av detta, d. v. s. $1{,}22 \frac{\lambda}{D}$. Om vi låta baslinjen b mellan de två diafragmorna bli $= D$, lär oss alltså formeln I, att interferometerns upplösningsförmåga är något mer än dubbelt så stor som teleskopets vid direkt seende.

I praktiken blev nu interferometermetoden för Capella något modifierad. Diafragmorna anbragtes ej framför objektivet (i detta fall konkavspegeln) utan i strålarnas väg nära okularet och så att deras förbindelselinje är vridbar i positionsvinkel. Om Θ är vinkeln mellan denna förbindelselinje och en linje förbindande projektionerna i fokalplanet av de två komponenterna i dubbelstjärnan, är den effektiva baslinjen

$$b = b_0 \cos \Theta;$$

b_0 är här avståndet mellan två fingerade diafragmor framför objektivet, som skulle göra samma tjänst som de små diafragmorna närmare okularet.

Om b_0 är riktigt avpassad, försvinna interferenslinjerna i fyra lägen, av vilka två och två skilja sig med 180°. Bissektriserna till vinklarna mellan närliggande riktningar ge läget av stjärnornas sammanbindningslinje och den däremot vinkelräta riktningen. Då baslinjen göres mindre, dras de karakteristiska lägena närmare den förstnämnda riktningen. Genom observationer av detta slag får man tydligen en bestämning av dubbelstjärnekomponenternas läge i positionsvinkel,[1] såväl som genom formeln I av deras angulära distans. Med denna metod når man, bortsett från den större upplösande kraften, en mycket större procentuell

[1] Som bekant menas med positionsvinkel vinkeln mellan stjärnornas sammanbindningslinje och storcirkeln till himmelspolen.

noggrannhet än vid en direkt utmätning av en dubbelstjärna med mikrometer. Sannolika felet i positionsvinkel är för Capella mindre än 3°, kan antagligen med lätthet reduceras till 1°. Distansen fastställes på mindre än 1 % när. Den är mycket nära $0''{,}05$ (skenbara banan är nära cirkulär), och perioden är 104,006 dygn. Ur de spektroskopiska data hade man förut funnit 104,022 dygn. Genom sammanställning av interferometerresultaten och de spektroskopiska data finner man dessutom följande angående systemet i fråga:

Den relativa banans halvaxel är 130 924 000 km.
» större stjärnans massa är 4,62 gånger solens massa.
» mindre » » » 3,65 » » »

Dubbelstjärnans parallax är $0''{,}0600$, motsvarande ett avstånd av 54 ljusår.

Systemets totala lyskraft är ungefär 200 gånger solens.

Det härledda avståndet hör till de säkrast kända av alla stjärnors.

Undre gränsen för en distans som kan uppmätas med hjälp av 100-tumsspegeln är ungefär $0''{,}025$.

Efter den stora framgången med utmätningen av Capella grep man sig med ökat förtroende an med stjärndiametrarnas problem. Den föregående framställningen ger vid handen, att försvinnandet av interferensbanden endast beror av avståndet mellan de två mot objektet vända öppningarna och den därav betingade ändringen i vägskillnad från en punkt av föremålet till en annan men ej av den senare inträdande interferensens närmare natur. Då baslinjen behöver göras så lång, att objektivets diameter ej räcker till, kan man därför, som fig. 3 visar, framför objektivet sätta en bjälke, som uppbär två speglar M_1 och M_4, som kunna skjutas ut från objektivet åt båda hållen, och som insända ljuset mot två inre speglar M_2 och M_3, som slutligen kasta ljuset in mot den stora konkavspegeln. Interferenslinjernas avstånd i diffraktionsbilden bestämmes av avståndet mellan dessa senare speglar M_2 och M_3. Den

effektiva baslinjen b blir åter avståndet mot konkavspegeln mellan speglarna M_1 och M_4.

Reflektorn användes i sin »Cassegrain»-form, så att ljuset, efter att ha lämnat den stora konkavspegeln, undergår ännu tre speglingar, innan det träffar okularet. Fokaldistansen är i denna form 40,8 m, avståndet mellan interferensfransarna i bilden blir ungefär 0,02 mm för ett avstånd något över 1 m mellan M_2 och M_3.

Okularet är utrustat med en speciell anordning för finjustering av väglängdsskillnaden mellan de två interfererande

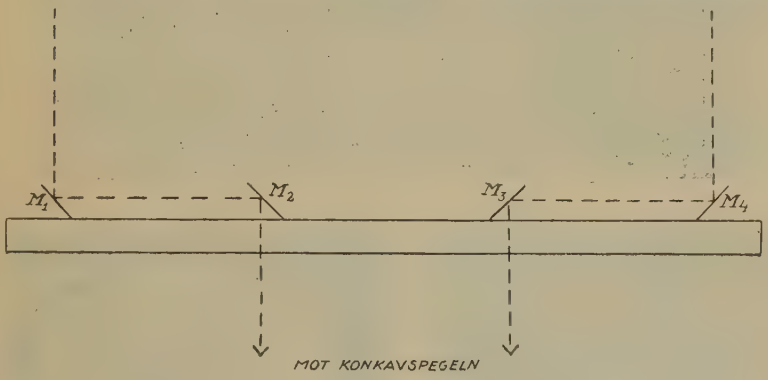
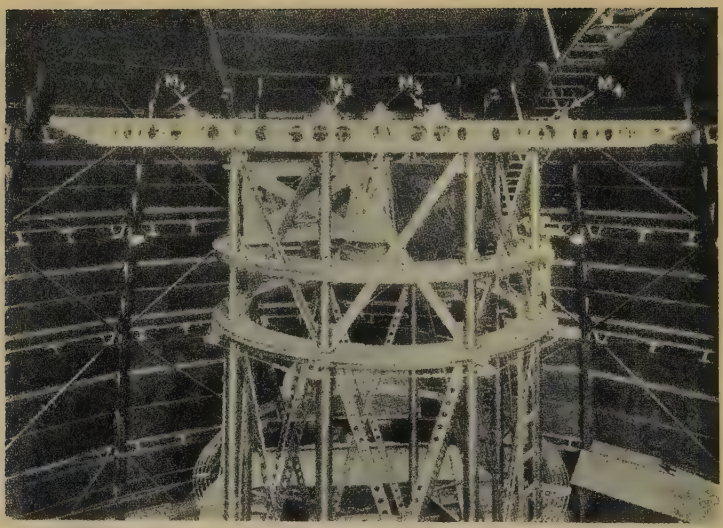


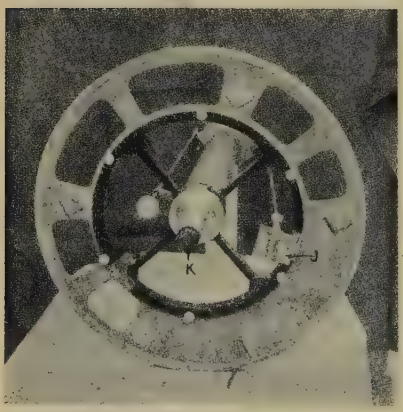
Fig. 3.

strålknippena. Det ena knippet går genom en rörlig glaskil, det andra genom en kompenserande glasplatta.

Bjälken framför reflektorns mynning är av stål med en noggrant utskuren ränna för speglarnas rörelse. En framställning av instrumentets utseende finnes i fig. 4. Vid de första försöken gjordes denna reglering för hand, varvid en assistent fick sitta på teleskopet invid bjälken. Senare insattes en liten elektrisk motor för denna inställning. M_1 och M_4 inställas så nära som möjligt symmetriskt med avseende på teleskopet, men den slutliga justeringen till lika väglängd för de två interfererande knippena göres med den rörliga glaskilen vid okularet.

Ändan av tuben är betäckt, med undantag av två hål motsvarande M_2 och M_3 och dessutom två andra liknande





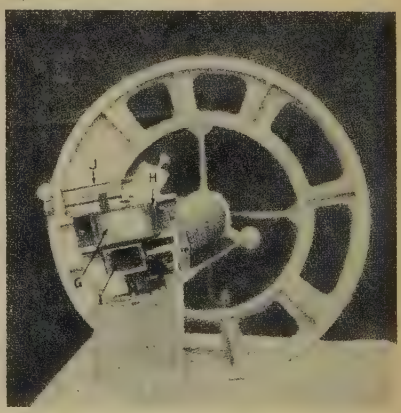


Fig. 4. Interferometer, använd på Mount Wilsons 100-tumsreflektor.

hål, genom vilka stjärnljuset kan falla direkt in mot den stora objektivspegeln. De strålknippen, som falla in genom dessa sekundära öppningar gå genom kilen och kompensationsplattan vid okularet och ge en bild i synfältet bredvid den till speglarna *M* hörande. Då justering utförts, ser man

även i denna bild en serie interferenslinjer, som kallas »zero fringes», och som äro värdefulla att ha till jämförelse med den primära bildens linjer.

Den 13 dec. 1920 gjordes dessa justeringar av Pease och Anderson för ett par stjärnor, βPersei och γOrionis, med ett avstånd mellan M_1 och M_4 på 307 cm. Därefter vändes instrumentet mot den röda jättestjärnan αOrionis i Orions vänstra axel. Här försvunno den primära bildens fransar, under det att »zero fringes» utan svårighet kunde återfinnas. Slutligen vändes instrumentet mot Procyon, varvid båda systemens fransar fortfarande åter blevo synliga. Detta var endast ett preliminärt försök men medförde dock ett definitivt resultat. Försvinnandet av interferenslinjerna kunde ej tydas på annat sätt än som en följd av en märklig skenbar skiva hos αOrionis. Mot $b = 307$ cm svarar enligt formel II, om λ sättes till 5 750 $Å$ den angulära diametern

$$\alpha = 0'',047,$$

ungefär motsvarande den vinkel en vanlig tioöring upptar på sju mils avstånd. Parallaxen är för αOrionis uppmätt till $0'',018$, d. v. s. under denna vinkel synes jordbanans radie från stjärnan. Med användning av detta värde på avståndet blir stjärnans diameter

$$a = 390\,000\,000 \text{ km},$$

d. v. s. något mindre än Marsbanans diameter.

Om, såsom med säkerhet är fallet, intensiteten på stjärnans skenbara skiva, i likhet med vad som är förhållandet med solen, avtar från centrum mot kanten, blir den verkliga diametern ännu betydligt större, möjligen ända till 20 %. — Osäkerheten i denna första mätning anger Pease till ungefär 10 %.

Teoretiska beräkningar av angulära diametrar för stjärnor kunna utföras på grundval av vad man känner om stjärnornas yttemperatur. Ur intensitetsfördelningen i spektrum kan yttemperaturen beräknas enligt Plancks lag, och därefter kan enligt samma lag ytljusstyrkan J beräknas, d. v. s.

strålningsmängden per ytenhet av stjärnan inom det visuella spektralområdet. Om m är stjärnans skenbara storlek i den vanliga logaritmiska storleksskalan för samma spektralområde har man för diametern α:

$$\alpha = C \cdot 10^{-0{,}2\,m} J^{-\frac{1}{2}},$$

där C är en konstant, som kan fixeras med hjälp av data från solstrålningen. Enligt denna formel finna vi, att α blir stor för skenbart ljusstarka stjärnor (m litet) med låg temperatur.

Kontrollmätningar för α Orionis, såväl som mätningar av andra stjärnor, ha nu med stor flit utförts vid Mount Wilson. Följande tabell upptar de stjärnor för vilka något så när definitiva resultat erhållits. De på förhand av Russell beräknade teoretiska värdena äro också givna.

Stjärna	α_{obs}	α_{ber}
α Orionis	0″,045	0″,031
α Scorpii	0,040	0,028
α Tauri	0,018	0,024
α Bootis	0,018	0,019
β Pegasi	0,018	0,016
α Arietis	0,010	0,012

Vitare stjärnor visa, i överensstämmelse med den nyss givna formeln, mycket liten eller ingen minskning i interferenslinjernas synlighet.

Diametermätningarna ge oss en mycket värdefull kontroll på den nyss nämnda beräkningen av temperatur och ytljusstyrka genom tillämpning av Plancks lag. Vi få härmed en direkt verifikation av de röda jättestjärnornas oerhörda dimensioner. För α Orionis funno vi en verklig diameter överstigande 280 gånger solens, för α Bootis, Arcturus, finna vi på liknande sätt ur parallaxbestämningarna sanna diametern ungefär 17 gånger solens eller 23 miljoner km. Då vi ha skäl att förmoda, att massorna av dessa jättestjärnor ej äro mer än några få gånger solmassan, följer, att materien i dessa stjärnor måste befinna sig i ett stadium av största förtunning.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bokanmälan.

N. E. Nörlund. *Videnskablige causerier.* Kbnhvn 1923.

Ånyo kommer till oss från Danmark ett litet arbete i en genre, som tyvärr är alltför sällsynt, nämligen den populariserade matematiken. I sitt företal säger förf.: »De efterfølgende Sider tilsigter att give Læsere, som ikke er fortrolige med Matematik, et lille Inblik i de eksakte Videnskabers Arbeidsmetoder og en Orientering angaaende de Problemer, som disse Videnskaber beskæftiger sig med.»

Boken innehåller i fullständigt populär form — förutsättningarna äro så gott som inga alls — uppsatser, dels om naturvetenskapens metod i allmänhet, dels om talens historia och om olika slag av tal, dels om geometrien och dess förutsättningar.

I den tredje av de nämnda uppsatserna är att märka, att författaren går så långt, att han t. o. m. kommer in på de Cantorska oändlighetstalen, och i den sista får man en föreställning om Lobatschewskys och Hilberts geometrier.

Efter dessa kapitel komma några uppsatser av sådant slag, som man är mera van att finna i populära arbeten, nämligen om Bohrs atomteori samt några astronomiska uppsatser.

Boken uppfyller på det hela väl sitt ändamål att giva lekmannen en uppfattning av vissa delar av matematiken och fysiken, fastän nog en del inexakta uttryck och slarvfel äro att beklaga. Så t. ex. när förf. definierar 9^9 såsom »9 multiplicerat med sig själv 9 gånger», eller när han skriver 9^{9^9} i st. f. $9^{(9^9)}$, eller då han säger (sid. 113), att »Kun enkelte større Meteorer falder ned paa Jordens Overflade»

utan att nämna något om det kosmiska stoftet, likasom ett par förargliga tryckfel, såsom när det står »solen» i st. f. »jorden» (sid. 106) eller »jorden» i st. f. »månen» (sid. 121). Men med undantag av några dylika inadvertenser är boken korrekt och kan säkert uppfylla sitt ändamål. *M—r.*

En anmärkning om räkning med approximativa tal.

Man plägar i allmänhet utgå ifrån, att om ett tal är givet med n decimaler, och det multipliceras med ett (exakt) tal $< 10^p$, så fås produkten riktig med $n - p$ decimaler. Detta är emellertid ej alltid förhållandet: Visserligen fås då naturligen, om alla siffror medtagas, en produkt som skiljer sig från den riktiga med $< {}^1/_2$ enhet i den $(n-p)^{\text{te}}$ decimalen, men därmed är ej sagt, att den, avkortad till $n - p$ decimaler, blir riktig. De härvid uppkommande felen kunna nämligen addera sig.

Antag t. ex. att man vill söka $8 \cdot \sqrt{3}$ med 3 decimaler. $\sqrt{3}$ är $= 1{,}7320508 \ldots$ Skriver man då $8\sqrt{3} = 8 \cdot 1{,}7321$, så fås $13{,}8568$, eller förkortat till 3 decimaler **13,857**. Tar man däremot med 5 decimaler och skriver $8 \cdot 1{,}73205$, så fås $13{,}85640$, eller förkortat till 3 decimaler **13,856**.

Samma är förhållandet vid division. Söker man t. ex. $1{,}4100599 : 12$, så skulle man tro, att man genom att i bråket medtaga 4 decimaler, skulle få kvoten med 5 decimaler. Emellertid blir $1{,}4101 : 12 = 0{,}1175083 \ldots$ eller **0,11751**, under det att $1{,}4100599 : 12$ ger $0{,}1175049916 \ldots$ eller **0,11750**. *M—r.*

Matematiska uppgifter.

139) Man betraktar alla trianglar på samma bas. Visa, att rektangeln av de inskrivna och omskrivna cirklarnas

radier närmar sig ett bestämt gränsvärde, då triangelns fria vinkelspets närmar sig en bestämd punkt på basen. (*Iter.*)

140) Bevisa, att a^5 alltid måste sluta på samma siffra som a. (*G. L—g.*)

141) Två räta linjer i olika plan bilda en given vinkel $= \alpha$. Deras kortaste avstånd AB är $= h$. Bestäm på dem två punkter M och N så, att MN har en given längd l, och tetraedern $ABMN$ en given volym a^3.

142) Konstruera brännpunkterna till en ellips eller hyperbel, då man känner de linjer, utefter vilka axlarna falla, samt två tangenter. (*X.*)

143) En antiballongkanons största skottvidd i horisontel led är a^{km}, och den kan inställas i vilken vinkel som hälst. Hur högt behöver en flygare gå för att, utan att kunna träffas av densamma, kunna nedsläppa en bomb på b^{km} avstånd från densamma? Luftmotståndet försummas. (*M—r.*)

144) I en konvex n-hörning (n ett udda tal) är sidan a_1 delad i p_1 delar; a_2 i p_2; ...; a_n i p_n delar och delningspunkterna sammanbundna med motstående vinkelspets (d. v. s. den som har lika många hörnpunkter mellan sig och sidans båda ändpunkter). I hur många delar blir därigenom figuren delad, förutsatt att aldrig tre av dessa linjer skära varandra i samma punkt?

Hur förenklas formeln, om $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$? (*M—r.*)

Lösningar till uppgifterna i h. 2. 1922—23.

127) *Om en triangel är inskriven i en cirkel, och från en punkt på periferien normaler fällas mot sidorna, så ligga dessas fotpunkter i rät linje.*

Antagande: $\triangle ABC$ är inskriven i cirkeln $ABCP$. PA_1, PB_1, PC_1 äro vinkelräta mot var sin av sidorna BC, CA, AB.

Påstående: A_1B_1 och B_1C_1 ligga i rät linje.

Bevis: Drag PA och PC. Då är $\triangle PAC_1 \sim PCA_1$, således $\angle APC_1 = CPA_1$. Då vidare fyrhörningarna PAC_1B_1 och PA_1CB_1 äro inskrivbara, så är $\angle APC_1 = AB_1C_1$, $\angle CPA_1 = CB_1A_1$, således $\angle AB_1C_1 = CB_1A_1$, varav satsen omedelbart framgår.

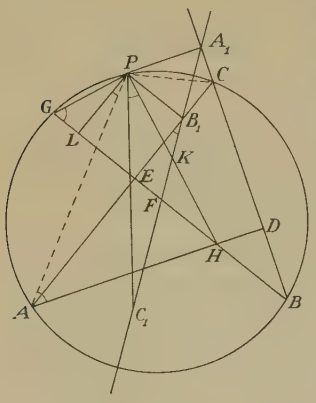


Fig. 1.

Beviset kan även föras på följande sätt. Man har $\angle A_1B_1P = A_1CP = C_1AP$, $\because \angle A_1B_1P + PB_1C_1 = C_1AP + PB_1C_1 = \pi$, varav satsen följer.

Satsen har här bevisats för det fallet, att B_1 och C_1 falla på var sin av sidorna CA, AB, A_1 däremot på *förlängningen* av BC. För de övriga ifrågakommande fallen undergår beviset emellertid endast enkla modifikationer.

Linjen $A_1B_1C_1$ benämnes vanligen Wallacelinjen (förkortat W-linjen) efter Wallace, som publicerat satsen i Leybourn's Mathematical Repository (1799).

Omvänt gäller följande sats:

Om fotpunkterna av de perpendiklar PA_1, PB_1, PC_1, som från en punkt P dragas mot sidorna BC, CA, AB av en triangel ABC, ligga i rät linje, så ligger punkten P på cirkeln ABC.

Dragas nämligen PA och PC, har man $\angle APC_1 = AB_1C_1 = CB_1A_1 = CPA_1$, alltså $\triangle APC_1 \sim CPA_1$, således $\angle PAC_1 = PCA_1$, varav satsen följer.

W-linjen går även genom mittpunkten på den räta linje, som förenar P med höjdernas skärningspunkt. För att bevisa detta draga vi höjderna AD, BE, vilka råka BC och CA i D och E resp. BE skär $A_1B_1C_1$ i F och, tillräckligt utdragen, cirkeln ABC i en andra punkt G. Höjderna AD, BE skära varandra i H. PH skär $A_1B_1C_1$ i K. $PL \parallel CA$ skär BG i L. Då är $\angle PGB = PAB$, således $\angle GPL = APC_1 = AB_1C_1$. Då vidare PL och B_1E äro mot-

stående sidor i en rektangel, så är $\triangle PLG \cong B_1EF$, således $GL = EF$. Vidare är, enligt en bekant sats, $HE = EG$,[1] således $HF = EL = PB_1$. Man har således $\triangle HFK \cong PB_1K$, varav följer, att PH är skuren mitt itu i K.

De bevisade satserna stå i nära samband med vissa egenskaper hos parabeln. Enligt en bekant sats är topptangenten till en parabel tillika orten för den punkt, i vilken en godtycklig tangent skäres av brännpunktsperpendikeln. Omvänt följer, att om ett strålknippe skäres av en rät linje, så är orten för de räta linjer, som dragas genom skärningspunkterna vinkelrätt mot resp. strålar, en parabel, vars brännpunkt sammanfaller med strålknippets centrum och vars topptangent sammanfaller med knippets transversal. Triangelsidorna BC, CA, AB äro således tangenter till en parabel, vars brännpunkt ligger i P och vars topptangent sammanfaller med triangeltransversalen $A_1B_1C_1$. Låter man P genomlöpa cirkeln ABC, erhåller man en triangelsidorna tangerande parabelskara. Av den bevisade satsen framgår således, att orten för brännpunkten till en i en triangel inskriven parabel är den kring triangeln omskrivna cirkeln. Orten för styrlinjen är höjdernas skärningspunkt. Omvänt följer, att höjderna i en av tre parabeltangenter bildad triangel skära varandra på parabelns styrlinje (sats av Steiner). (*Iter.*)

Anm. Problemförfattaren (X) har även visat, att satsen är det enklaste fallet av följande allmänna sats:

Linjerna l_1, l_2, ..., l_n utgöra i denna ordning sidor i en konvex polygon. Från en punkt P fällas normalerna PA_1, PA_2, ..., PA_n mot resp. sidor. Orten för P, då polygonen A_1A_2, ..., A_nA_1 har en given yta K, är en cirkel.

Om nämligen $n=3$ och $K=0$, ligga fotpunkterna i rät linje och ortcirkeln måste vara den kring triangeln omskrivna, emedan triangelhörnen tydligen tillhöra orten.

Bevis. Låt l_r ha ekv.

$$x \cos \alpha_r + y \sin \alpha_r - p_r = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

[1] Man har nämligen $\triangle BCE \sim AHE$, därför $BE : EC = AE : EH$, således $BE \cdot HE = AE \cdot EC = BE \cdot EG$, $\therefore HE = EG$.

där alla p_r kunna antagas positiva, om origo ligger innanför polygonen. Om P har koord. (x, y), får man ekv.

$$K = \tfrac{1}{2}\sum_1^n (x\cos\alpha_r + y\sin\alpha_r - p_r).$$

$$(x\cos\alpha_{r+1} + y\sin\alpha_{r+1} - p_{r+1})\sin(\alpha_{r+1} - \alpha_r),$$

i fall såsom vi antaga

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < a_{n+1} \text{ och } \alpha_{n+1} = \alpha_1 + 2\pi,\ p_{n+1} = p_1.$$

Koefficienten för xy-termen i högra membrum är

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^n \sin(\alpha_{r+1}+\alpha_r)\sin(\alpha_{r+1}-\alpha_r) = \tfrac{1}{4}\sum_1^n (\cos 2\alpha_r - \cos 2\alpha_{r+1}) = 0.$$

Skillnaden mellan koeff. för x_n^2- och y^2-termerna är

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^n \cos(\alpha_{r+1}+\alpha_r)\sin(\alpha_{r+1}-\alpha_r) = \tfrac{1}{4}\sum_1^n (\sin 2\alpha_{r+1} - \sin 2\alpha_r) = 0,$$

varmed satsen är bevisad. Det kan tilläggas att de cirklar, som svara mot olika värden på K, äro koncentriska.

128) *Lös ekvationerna*

a) $\operatorname{tg} mx = \dfrac{\sin(m+n)x}{\cos(m-n)x}$ och b) $\operatorname{tg} mx = \dfrac{\cos(m+n)x}{\sin(m-n)x}$.

a) kan skrivas:

$$\frac{\sin mx}{\cos mx} = \frac{\sin(m+n)x}{\cos(m-n)x} =$$

$$= \frac{2\sin\left(m+\frac{n}{2}\right)x\cos\frac{n}{2}x}{2\cos\left(m-\frac{n}{2}\right)x\cos\frac{n}{2}x} = \frac{2\cos\left(m+\frac{n}{2}\right)x\sin\frac{n}{2}x}{2\sin\left(m-\frac{n}{2}\right)x\sin\frac{n}{2}x},$$

varav således fås

antingen

$$\operatorname{tg}\left(m+\frac{n}{2}\right)x = \operatorname{cot}\left(m-\frac{n}{2}\right)x,$$

varav

$$mx + \frac{n}{2}x = \frac{\pi}{2} - mx + \frac{n}{2}x + k\pi,$$

således

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{4m};$$

eller

$$\cos\frac{n}{2}x \text{ eller } \sin\frac{n}{2}x = 0,$$

således

$$\sin nx = 0, \text{ varav } x = \frac{k\pi}{n}.$$

Rötterna således:

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{4m} \text{ och } x = \frac{k\pi}{n}.$$

b) kan skrivas:

$$\frac{\sin mx}{\cos mx} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - mx - nx\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - mx + nx\right)} =$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - mx - \frac{n}{2}x\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - mx + \frac{n}{2}x\right)} =$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - mx - \frac{n}{2}x\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - mx + \frac{n}{2}x\right)},$$

varav vi således få

antingen

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - mx - \frac{n}{2}x\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - mx + \frac{n}{2}x\right),$$

varav

$$\frac{\pi}{4} - mx - \frac{n}{2}x = -k\pi + \frac{\pi}{4} + mx - \frac{n}{2}x,$$

således

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{4m}$$

eller

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{n}{2}x\right) \text{ eller } \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{n}{2}x\right) = 0,$$

således

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - nx\right) = 0, \text{ varav } x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

Rötterna således:

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{4m} \quad \text{och} \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

Anm. Specialfallen $m = 0$, $n = 0$, $m \pm n = 0$ uteslutas.

(Löst av »*Iter*» och *M. Hauge*)

129) *Som bekant har den spetsiga vinkeln mellan två supplementarkordor i en given ellips ett visst minimivärde* α. *Är det möjligt att från ändpunkterna av en godtycklig diameter i ellipsen draga två kordor, som bilda vilken vinkel som helst mellan* $\frac{\pi}{2}$ och α?

Maximivärdet antages, såsom lätt visas, då kordornas vinkelkoefficienter äro $\frac{b}{a}$ och $-\frac{b}{a}$. Kallas då den givna diameterns ändpunkter (p, q) och $(-p, -q)$, så kan man från dessa ändpunkter draga kordorna

$$y - q = \frac{b}{a}(x - p) \quad \text{och} \quad y + q = -\frac{b}{a}(x + p).$$

Adderas och subtraheras dessa ekvationer, så fås skärningspunktens koordinater $x = -\frac{aq}{b}$, $y = -\frac{bp}{a}$, vilken ligger på ellipsen emedan $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2q^2 + b^2p^2 = a^2b^2$.

Man kan således draga kordorna så, att den spetsiga vinkel de göra med varandra är α. Då diametern till sin storlek ligger mellan $2a$ och $2b$, så måste den på densamma som diameter uppritade cirkeln skära ellipsen, och således kunna från dess ändpunkter dragas supplementarkordor som göra vinkeln $\frac{\pi}{2}$. Av kontinuiteten följer då satsen, att supplementarkordor kunna fås som göra vilken vinkel som helst mellan α och $\frac{\pi}{2}$, vilka värden även kunna antagas, såvida ej diametern är en axel, då $\frac{\pi}{2}$ endast blir

ett gränsfall, eller om den givna diametern är en av de lika långa konjugatdiametrarna, då α blir ett gränsfall.

(Löst av »*Iter*».)

En annan uppfattning av problemet representeras av signaturen X, som insänt följande lösning:

Följande undersökning avser variationen hos $\angle ACB$, som kan vara rät, trubbig eller spetsig. Denna vinkel varierar kontinuerligt, då C genomlöper ena bågen AB, till vilken vi inskränka oss. Då C faller i A eller B, definierar jag $\angle ACB$ som lim $\angle ACB$, då C närmar sig A eller B från det inre av den båge vi betrakta. Det är klart, att ett extremvärde hos $\angle ACB$ måste vara α eller $\pi - \alpha$, och att ett sådant uppträder, då AC och BC äro parallella med de lika långa konj. diam. Jag drager därför de med dessa diam. parallella kordorna genom A och B, varvid parallellogrammen $ACB\bar{C}^1$ uppstår. $\bar{C}\left(-\frac{aq}{b}, -\frac{bp}{a}\right)$ och $\bar{C}^1$ äro diametralt motsatta punkter. Tre fall äro möjliga.

1:o) Parallellogrammen oegentlig. $\bar{C}$ faller i A, $\bar{C}^1$ i B. *AB är en av de lika långa konj. diam.* Då varierar $\angle ACB$ monotont från α till $\pi - \alpha$ och tager varje överhuvud möjligt värde på vinkeln mellan två supplementarkordor, vartdera en gång på vår båge (α och $\pi - \alpha$ gränsfall).

2:o) Parallellogrammen egentlig. $\bar{C}$ faller på vår båge och *$\angle A\bar{C}B$ är spetsig och* $= \alpha$. Då varierar ACB från β (den spetsiga, ev. räta, vinkel AB bildar med tangenten i A, $\beta > \alpha$) ned till α och sedan upp till $\pi - \beta$. Alltså tar $\angle ACB$ även i detta fall alla möjliga värden $\leqq \frac{\pi}{2}$, de mellan β och α t. o. m. två gånger, dessutom värdena upp till $\pi - \beta$, men ej värdena mellan $\pi - \beta$ och $\pi - \alpha$.

3:o) Som i 2:o), men $\angle A\bar{C}B$ är trubbig $= \pi - \alpha$. Då varierar $\angle ACB$ från $\beta > \alpha$ upp till $\pi - \alpha$ och sedan ned till $\pi - \beta$. Då tager vinkeln ACB ej värdena mellan α och β, men i stället värdena mellan $\pi - \beta$ och $\pi - \alpha$ två gånger.

Jag nöjer mig med att påpeka gränsfallen [β (3) och $\pi - \beta$ (2)]. I 3:o) är konstr. (i denna mening) alltså ej utförbar.

Om $\overline{OC} > OA$, föreligger 2:o), om $\overline{OC} < OA$, 3:o) (O är ellipsens centrum). Nu äro AB och $\overline{cc}$[1] *lika långa med var sin av två konj. diam.*, ty

$$\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = p^2 + q^2 + \left(\frac{-aq}{b}\right)^2 + \left(\frac{-bp}{a}\right)^2 =$$

$$= (a^2 + b^2)\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2 .$$

Alltså skall AB vara kortare än eller ev. lika lång som sin tillhörande konj. diam., om $\angle ACB$ skall kunna taga alla värden mellan α och $\frac{\pi}{2}$, m. a. o. AB och lillaxeln skola falla i samma vinkelöppningar mellan de lika långa konj. diam. eller ev. AB sammanfalla med en av dessa.

130) *I en cirkel delar tangentkordan till en punkt P samt punkten P harmoniskt varje korda som går genom P.*

I. *Geometrisk lösning.*

Låt PA och PB tangera cirkeln O i A och B, och låt AB skära PO i C. Låt vidare sekanten PDE skära cirkeln i D och E och AB i P_1. EC skär då förlängd cirkeln i en andra punkt F. Då är $OP \cdot OC = \overline{OA}^2 = \overline{OE}^2 = \overline{OF}^2$, således OE och OF tangenter till var sin av cirklarna ECP och FCP; $\therefore \angle OPE = OEF = OFE = OPF$,[1] således $PD = PF$, varav åter följer, att $DF \perp PO$ och således $\parallel AB$.

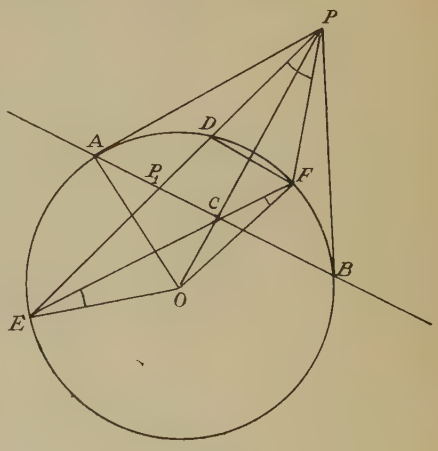


Fig. 2.

[1] Jfr denna tidskrift årg. 3, uppg. 55 (sid. 245).

Man har då

$$EP : PD = EP : PF = EC : CF = EP_1 : P_1D,$$

varmed satsen är bevisad.

Då satsen uttrycker en projektivisk egenskap, kan den utan vidare anses bevisad för ett godtyckligt (egentligt) kägelsnitt.

»*Iter.*»

II. *Analytisk lösning.*

Låt cirkelns ekvation vara $x^2+y^2=r^2$ och punkten P:s koordinater $(p, 0)$. Då är tangentkordans ekv. $px=r^2$. Den skär x-axeln i $(x, 0)$. Om en annan korda av längden $2a$ går genom P, så låt den av tangentkordan delas i styckena $a+x_1$ och $a-x_1$, och sätt dess mittpunkts avstånd från $P=p_1$. Vi hava då:

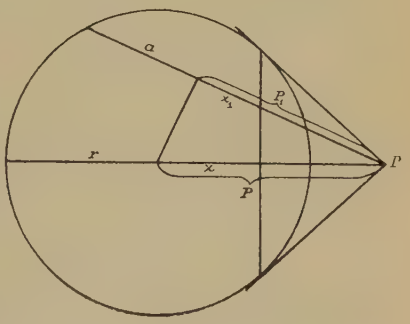


Fig. 3.

$$\begin{cases} px=r^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ p(p-x)=p_1(p_1-x_1) & \ldots\ldots\ldots (2) \\ p_1^2=p^2-r^2+a^2 & \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Genom elimination fås $p_1x_1=a^2$,

varav

$$\frac{x_1}{a}=\frac{a}{p_1}$$

och slutligen

$$\frac{a+x_1}{a-x_1}=\frac{p_1+a}{p_1-a}.$$

131) *Bevisa att*

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^2}{1^2+2^2+\ldots+n^2}=0,$$

utan att summera serien.

Om $E\left(\frac{n}{2}\right)$ betecknar det största hela talet $<\frac{n}{2}$, så har man, om de $n-E\left(\frac{n}{2}\right)$ första termerna i nämnaren strykas

och de $E\left(\frac{n}{2}\right)$ återstående minskas till $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ (då $n \geqq 2$),

$$0 \leqq \lim_{n=\infty} \frac{n^2}{1^2+2^2+\ldots+n^2} \leqq \frac{n^2}{\frac{n^2}{2^2} E\left(\frac{n}{2}\right)} = \lim_{n=\infty} \frac{2^2}{E\frac{n}{2}} = 0.$$

Samma bevis gäller, om exponenten 2 ersättes med en positiv exponent, vilken som helst. Är exponenten 0 eller negativ, är satsen självklar. *X.*

(Även löst av »*Iter*».)

132) *Om jorden antages sfärisk med radien 1, och två meridianer dragas, som på två parallellcirklar, vilkas latituder skilja sig på 60°, avskära bågarna* $a=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ *och* $b=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$, *så frågas efter dessa latituder och longitudskillnaden mellan meridianerna.*

Kallas latituderna φ och $\varphi+60°$, samt longitudskillnaden $x°$, så är

$$a = \frac{x}{360} \cdot 2\pi \cos\varphi, \quad b = \frac{x}{360} \cdot 2\pi \cos(\varphi+60°).$$

Således

$$\frac{x}{180}\pi = \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{b}{\cos(\varphi+60°)} = \frac{a+b}{2\cos(\varphi+30°)\cos 30°} = \frac{a-b}{2\sin(\varphi+30°)\sin 30°}.$$

Således

$$\operatorname{tg}(\varphi+30°) = \frac{a-b}{a+b}\cot 30° = 1; \quad \varphi = 15°$$

och

$$x = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{a-b}{\sin 45°} = \frac{180°}{\pi} \cdot \sqrt{6} = 140°,35.$$

Löst av »*Iter*» och *X.*

Prisuppgiften för årg. 1922—23.

Tvenne svar hava ingått. Förf. till det ena har dock missuppfattat problemet såtillvida, att han har förutsatt, att det sökta talet skall vara fyrsiffrigt och därigenom gjort det betydligt lättare. Han kan därför ej tillerkännas något pris.

Den andra

MALTE KARLBERG *i Göteborgs Högre Reallläroverks Ring IV B*

har däremot ej blott korrekt löst uppgiften, utan även givit en ny, vacker talteoretisk sats, och har därför tillerkänts vårt första pris, *Hj. Tallqvist, Nyare Strålnings- och Atomfysik.*

Hans lösning är följande:

Det finnes ett, och endast ett, kvadrattal, sådant, att det endast har fyra från noll skilda siffror. Talets båda första siffror äro sinsemellan lika, och likaledes de båda sista.[1] *Bevisa detta! Och uppgiv om möjligt någon eller några liknande uppgifter.*

Om ett tals siffror från slutet äro α, β, γ, δ, ε, ..., så är talets kvadrat:

$$(\alpha+10\beta+100\gamma+1\,000\delta+\ldots)^2=\alpha^2+20\alpha\beta+100\beta^2+ \\ +200\alpha\gamma+2\,000\alpha\delta+2\,000\beta\gamma+\ldots.$$

Kvadratens sista siffra blir tydligen α^2:s sista. Kvadratens näst sista blir den sista i summan av α^2:s första och $2\alpha\beta$. Då $2\alpha\beta$ ju är ett jämnt tal, blir ovannämnda summa jämn, om α^2:s första siffra är jämn, och i motsatt fall udda. I föreliggande fall skola de två sista siffrorna vara lika. Alltså skola de vara av samma slag (båda udda, eller båda jämna). Kvadraterna på talen 1—9 äro 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Ovannämnda villkor uppfylles endast av 04 och 64. Talet måste alltså sluta på en fyra. Alla andra kvadrattal, än de, som sluta på 4, ha alltså de två sista siffrorna av olika slag.

[1] För att satsen skall vara sann, fordras dock även, att de båda sista siffrorna ej äro 0.

Om vi antaga, att talets kvadratrot är τ, samt att τ^2:s första och sista siffra är resp. a och b, fås:

$$\tau^2 = 10a \cdot 10^{n+2} + a \cdot 10^{u\ 2} + 10b + b,$$

där $n \geqq 0$ är ett helt tal.

$$\tau^2 = 11a \cdot 10^{n+2} + 11b$$

$$\therefore \frac{\tau^2}{11} = a \cdot 10^{n+2} + b.$$

Då $\frac{\tau^2}{11}$ är ett helt tal, måste även $\frac{\tau^2}{121}$ vara det, ty τ^2 måste innehålla en jämn dignitet av 11.

$$\frac{\tau^2}{121} = \frac{a \cdot 10^{n+2} + b}{11}.$$

I. $n = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

$$\frac{\tau^2}{121} = 9a \cdot 10^n + 9a \cdot 10^{n-2} + \ldots +$$

$$+ 9a \cdot 10^3 + 9a \cdot 10 + a + \frac{b-a}{11}.$$

$\frac{b-a}{11}$ måste vara ett helt tal. Då $b = 4$ och $a \leqq 9$, måste $a = 4$, vilket gör bråket till 0.

$$\therefore a = b = 4.$$

$$\frac{\tau^2}{121} = 4 \cdot 9 \cdot 10^n + 4 \cdot 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 4 \cdot 9 \cdot 10^3 + 4 \cdot 9 \cdot 10 + 4.$$

$$\frac{\tau^2}{121} = 4(9 \cdot 10^n + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9 \cdot 10^3 + 91).$$

$4 = 2^2$. Alltså måste parentesen vara en kvadrat. Då emellertid dess två sista siffror äro av samma slag (9, 1) för alla hithörande a-värden, men den sista ej är 4, kan paren tesen ej vara kvadratisk. Alltså kan n ej vara udda.

II. $n = 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

$$\frac{\tau^2}{121} = 9a \cdot 10^n + 9a \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9a \cdot 10^2 + 9a + \frac{a+b}{11}.$$

$\frac{a+b}{11}$ måste vara ett helt tal, och $a \leqq 9$ samt $b=4$. Alltså $a=7$ och $\frac{a+b}{11}=1$.

$$\therefore \frac{\tau^2}{121}=63 \cdot 10^n+63 \cdot 10^{n-2}+ \ldots +63 \cdot 10^4+6\,364.$$

$$\frac{\tau^2}{121}=4(63 \cdot 25 \cdot 10^{n-2}+63 \cdot 25 \cdot 10^{n-4}+ \ldots +63 \cdot 25 \cdot 10^2+1\,591).$$

Även här måste parentesen vara en kvadrat. Alltså kan n ej vara 2, 4, 6, 8, 10, ... ty då slutar parentesen på 91.

$$n=0 \text{ gör } \frac{\tau^2}{121}=\frac{a \cdot 10^{n+2}+b}{11}=\frac{704}{11}=64=4 \cdot 4^2.$$

$\tau^2=7\,744$, vilket är det enda tal, som uppfyller villkoren.

Ny sats.

Om man börjar på 1 i serien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, därpå skriver 2, 3, ... och så vänder vid en av siffrorna samt skriver dem tillbaka till 1 igen, fås ett kvadrattal. T. ex. $123\,454\,321=11\,111^2$.

Om man vänder vid n blir talet k.

$$k=10^{2n-2}+2 \cdot 10^{2n-3}+3 \cdot 10^{2n-4}+ \ldots +(n-1)10^n+$$
$$+n \cdot 10^{n-1}+(n-1)10^{n-2}+ \ldots +300+20+1.$$

$$k=(10^{2n-2}+10^{2n-3}+10^{2n-4}+ \ldots +10^n+10^{n-1})+$$
$$+(10^{2n-3}+10^{2n-4}+ \ldots +10^n+10^{n-1}+10^{n-2})+$$
$$+(10^{2n-4}+ \ldots +10^n+10^{n-1}+10^{n-2}+10^{n-3})+$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots +$$
$$+(10^n+10^{n-1}+10^{n-2}+ \ldots +100+10)+$$
$$+(10^{n-1}+10^{n-2}+ \ldots +100+10+1).$$

Då fr. o. m. 10^{2n-2} t. o. m. 10^{n-1} finnas n stycken siffror, finns det också n stycken parenteser i ovanstående fördelning.

10^{2n-2} förekommer endast i 1:a parentesen
10^{2n-3} » » i 1:a och 2:a »

10^{2n-4} förekommer endast i 1:a, 2:a och 3:e parentesen

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

10^{n} » » » 1:a, 2:a, 3:e . . . $(n-1)$:e »

10^{n-1} » » » alla n parenteserna.

Alltså är följande ekvation sann.

$$k=10^{n-1}(10^{n-1}+10^{n-2}+10^{n-3}+10+1)+$$
$$+10^{n-2}(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots\ 100+10+1)+$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ +$$
$$+10(10^{n-1}+10^{n-2}+10^{n-3}+\ldots+10+1)+$$
$$+\ 1(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+100+10+1).$$

$$k=(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)(10^{n-1}+10^{n-2}+$$
$$+\ldots+10+1)=(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)^2.$$

Alltså är det bildade talet alltid en kvadrat.

Malte Karlberg.

Meddelande från Redaktionen.

Vi hava av prof. W. Ekman anmodats att meddela, att hans lärobok i mekanik, vilken anmälts i denna tidskrifts 3:e årg. 1:a häfte, numera ej säljes i bokhandeln, men kan rekvireras från förlaget, P. A. Norstedt & Söner, till ett pris av 18 kr. häftad och 21,50 kr. inbunden.

RÄTTELSE.

I fig. sid. 236 saknas den räta linjen AC_1B.